Stabilité des satellites d'astéroïdes

Audrey Compère

Département de mathématique
FUNDP Namur

Séminaire de Systèmes Dynamiques
14 octobre 2009

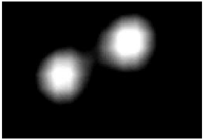
Table des matières

Introduction

Astéroïde binaire : système de deux astéroïdes tournant l'un autour de l'autre.

Formes possibles :

1. Les deux corps ont plus ou moins la même taille : astéroïde double
   Ex : antiope

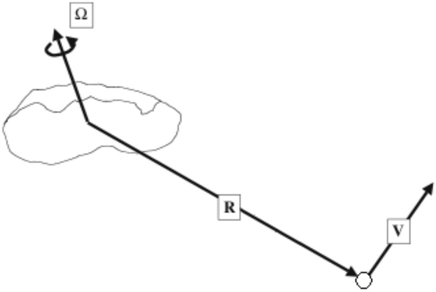


2. Un corps est vraiment plus petit que l'autre : astéroïde et son satellite
   Ex : Ida-Dactyl

Cas étudié : les satellites d'astéroïdes

Modèle :

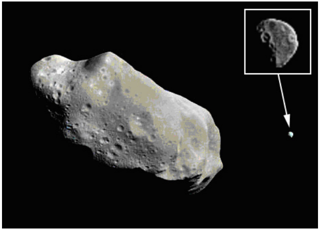
→ corps primaire : de forme quelconque
→ satellite : petit et distant du primaire ⇒ masse ponctuelle



Remarque : le même modèle peut être utilisé pour le mouvement d'une sonde autour d'un astéroïde irrégulier

Système Ida-Dactyl

Ida → astéroïde de la ceinture principale (famille Koronis)
→ forme très irrégulière et spin rapide



	Ida	Dactyl
Masse	$(4.2 \pm 0.6) \times 10^{16}$ kg	$\sim 4.10^{12}$ kg
Diamètres	$59800 \times 25400 \times 18600$ m	$1600 \times 1400 \times 1200$ m

Demi-grand axe de Dactyl : ~ 108 km

Dactyl :

Orbit data :

Semimajor axis (a)	:	108 km
Orbital period (P)	:	1.54 d
Eccentricity (e)	:	≥ 0.2?

Other data :

Mean radius	:	0.7 km
Principal diameters	:	$1.6 \times 1.4 \times 1.2$ km
Shape	:	less irregular then Ida
Ellisoidal fit (radii)	:	$0{,}8 \times 0{,}7 \times 0{,}6$ km
Masse	:	$\sim 4.10^{12}$ kg
Surface area	:	6,3 km^2
Volume	:	1,4 km^3
Spin period	:	$>$ 8 hr ? (slow and may be synchronous)

$\Rightarrow$ **Il reste beaucoup d'inconnues !!**

Travail de J-M Petit sur Ida-Dactyl (1997)

Contexte :

- La masse d'Ida n'est pas déterminée avec précision.
- Pour chaque masse, il y a une orbite keplérienne de Dactyl correspondant aux observations

Rem : L'influence du Soleil et de Jupiter sur le système est négligeable donc négligé.

Belton,1996

Hyperboliques

GM[2] ($km^3.sec^{-2}$)	Density[3] ($g.cm^{-3}$)	a[4] (km)	e	i (deg)	Ω (deg)	ω (deg)	f[5] (deg)	w+f (deg)	Period (hrs)	R_p[6] (km)	WRMS[7] (pixels)
~~0.00180~~	~~1.68~~	~~39.0~~	~~2.77~~	~~170.47~~	~~-31.26~~	~~-27.67~~	~~42.04~~	~~14.38~~	~~-~~	~~69.1~~	~~0.209~~
~~0.00190~~	~~1.77~~	[illegible]	~~2.33~~	~~170.57~~	~~-31.54~~	~~-26.69~~	~~40.81~~	~~14.12~~	~~-~~	~~70.7~~	~~0.181~~
~~0.00200~~	~~1.86~~	~~78.5~~	~~1.92~~	[illegible]	~~-31.82~~	[illegible]	~~39.32~~	~~13.83~~	~~-~~	~~72.5~~	~~0.167~~
~~0.00210~~	~~1.96~~	~~132.8~~	~~1.56~~	[illegible]	~~-32.10~~	[illegible]	~~37.60~~	~~13.54~~	~~-~~	~~74.4~~	~~0.164~~
~~0.00220~~	~~2.05~~	[illegible]	~~1.25~~	~~170.97~~	~~-32.34~~	~~-22.42~~	~~35.70~~	~~13.28~~	[illegible]	~~76.3~~	~~0.168~~
~~0.00225~~	~~2.10~~	~~650.9~~	~~1.12~~	~~171.04~~	~~-32.44~~	~~-21.54~~	~~34.71~~	~~13.17~~	~~-~~	~~77.2~~	[illegible]
0.00230	2.14	7912.0	0.99	171.12	-32.54	-20.51	33.56	13.06	25612.0	78.1	0.174
0.00235	2.19	667.0	0.88	171.19	-32.63	-19.50	32.47	12.97	620.2	79.0	0.177
0.00240	2.24	355.4	0.78	171.27	-32.71	-18.29	31.16	12.87	238.7	79.8	0.180
0.00250	2.33	200.8	0.59	171.41	-32.85	-15.52	28.23	12.71	99.3	81.4	0.185
0.00260	2.42	148.8	0.44	171.56	-32.97	-11.87	24.46	12.58	62.2	82.9	0.190
0.00280	2.61	107.7	0.21	171.84	-33.13	2.54	9.85	12.39	36.9	85.0	0.197
0.00290	2.70	97.6	0.13	171.97	-33.19	21.41	-9.09	12.32	31.3	85.1	0.199
0.00300	2.79	90.5	0.09	172.10	-33.24	63.56	-51.30	12.27	27.5	82.7	0.200
0.00310	2.89	85.4	0.11	172.23	-33.28	107.67	-95.44	12.23	24.7	76.1	0.201
0.00320	2.98	81.4	0.16	172.36	-33.30	127.84	-115.64	12.20	22.7	68.6	0.201
0.00340	3.17	76.0	0.26	172.61	-33.33	142.68	-130.50	12.17	19.8	56.2	0.201
0.00360	3.35	72.4	0.35	172.85	-33.32	148.77	-136.59	12.18	17.9	47.2	0.199
0.00380	3.54	70.1	0.42	173.09	-33.28	152.36	-140.14	12.22	16.6	40.5	0.197
0.00420	3.91	67.4	0.54	173.57	-33.12	156.87	-144.49	12.38	14.9	31.1	0.192

1. Bornes de stabilité sur la masse d'Ida ?

Premier modèle

Ida est approximé par un ellipsoïde.
Potentiel gravitationnel : intégrales elliptiques
Intégrateur : Bulirsch and Stoer avec une précision de 10^{-10}

Résultats :
Les orbites pour $M > 4.93 \times 10^{16}$ kg (q $<$ 63 km) sont très instables.
$\rightarrow$ crash ou échappée après quelques heures ou quelques jours !

Les autres orbites sont stables sur plusieurs centaines d'années.

Deuxième modèle

Approximation d'Ida par une collection de 44 sphères de tailles différentes.

$\Rightarrow$ borne plus précise.

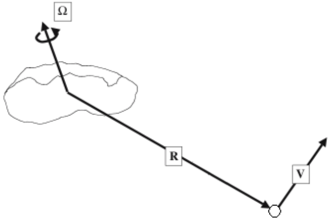
Simulations numériques

Ma recherche : conditions de stabilité d'un satellite d'astéroïde

Modèle : Une masse ponctuelle tournant autour d'un ellipsoïde

Variation de paramètres :

- forme du primaire
- masse du primaire
- rotation du primaire
- orbite initiale du satellite



$\Rightarrow$ système stable ?
$\Rightarrow$ résonances ?

Mise en oeuvre : cartes de chaos

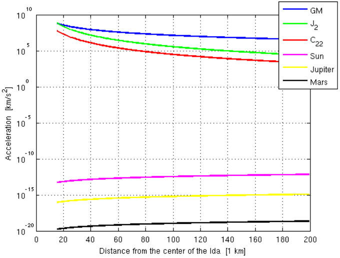
Bases

Code utilisé : programme Nimastep de Nicolas Delsate

Prévu pour : intégration numérique du mouvement d'un satellite artificiel autour d'une planète tellurique
→ pas prévu pour le cas d'un satellite d'astéroïde MAIS cas proche !

Différences :

- la forme irrégulière du corps primaire
- la rotation rapide du corps primaire
- l'excentricité souvent grande de l'orbite du satellite
- l'ordre d'importance des forces :



⇒ Forces pertinentes : la gravité et les forces dues à la forme du primaire

1. **Premiers tests :** article de A. Rossi (1999)

$\rightarrow$ Article qui teste des façons de calculer le potentiel d'un corps irrégulier.

Variation du noeud ascendant sur des ellipsoïdes axisymétriques (en $rad\ s^{-1}$) :

	théorie des pertubations	méthode polygones	méthode mascon	harmo sphériques
ellipsoïde avec une orbite circulaire inclinée	-7.7 10^{-6}	-1.09 10^{-5}	-1.11 10^{-5}	-1.07 10^{-5}
ellipsoïde avec une orbite elliptique inclinée	-8.37 10^{-6}	-1.25 10^{-5}	-1.33 10^{-5}	-1.27 10^{-5}
ellipsoïde avec une orbite elliptique inclinée et distante	-7.10 10^{-7}	-7.76 10^{-7}	-7.92 10^{-7}	-7.85 10^{-7}

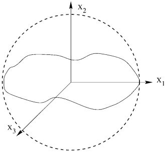
$\Rightarrow$ résultats convaincants

Calcul du potentiel

Adaptation à faire : calcul du potentiel dû à la forme de l'astéroïde

Usuellement : utilisation des harmoniques sphériques

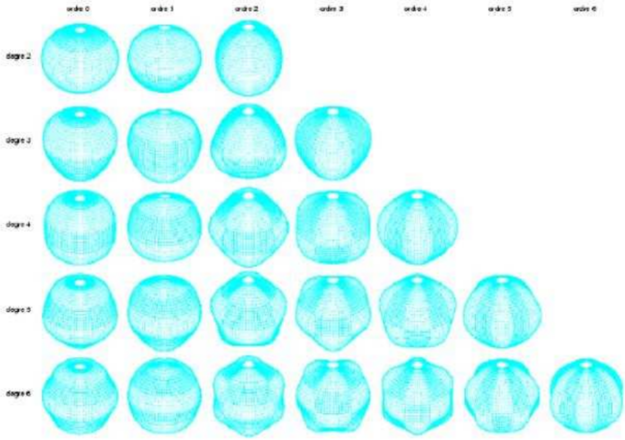
= **déformations d'une sphère**

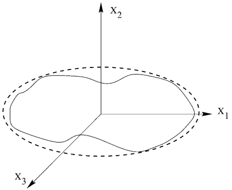


$$V(r,\theta,\lambda) = \frac{GM}{r}\left[1 + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R_e}{r}\right)^n P_{nm}(sin\theta)\left(C_{nm}\,cos\,m\lambda + S_{nm}\,sin\,m\lambda\right)\right],$$

où

- (r,θ,λ) sont les coordonnées sphérique d'un point à l'extérieur de la sphère
- R_e est le rayon de la sphère
- P_{nm} sont les polynômes de Legendre
- C_{nm} et S_{nm} sont les coefficients du potentiel.





Alternative : les harmoniques ellipsoïdales

= déformations d'un ellipsoïde

$$V(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = GM\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=1}^{2n+1}\alpha_n^p\frac{F_n^p(\lambda_1)}{F_n^p(a)}E_n^p(\lambda_2)E_n^p(\lambda_3),$$

où

- $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ sont les coordonnées ellipsoïdales d'un point à l'extérieur de la sphère
- a est le demi-grand axe de l'ellipsoïde de référence
- E_n^p et F_n^p sont respectivement les fonctions du premier et du deuxième ordre de Lamé
- α_n^p est un coefficient équivalent aux C_{nm} et S_{nm} du cas sphérique

Cas particulier des harmoniques elliptiques : Potentiel pour un ellipsoïde (Mac Millan,1958)

$$V(x_1, x_2, x_3) = \frac{3}{2} GM \int_{\lambda_1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x_1^2}{s^2} - \frac{x_2^2}{s^2 - h^2} - \frac{x_3^2}{s^2 - k^2}\right) \frac{ds}{\sqrt{s^2 - h^2}\sqrt{s^2 - k^2}}$$

où

- $h^2 = a^2 - b^2$ et $k^2 = a^2 - c^2$ (a, b et c sont les demi-grands axes de l'ellipsoïde avec $a \geq b \geq c$)
- (x_1, x_2, x_3) sont les coordonnées cartésiennes du point où on veut calculer le potentiel
- λ_1 est la première coordonnée ellipsoïdale de ce point.

Les coordonnées ellipsoïdales :

Ellipsoïde de référence (le plus petit ellipsoïde contenant le corps et centré au même centre de masse) :

$$\Gamma_0 := \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \text{avec } a \geq b \geq c$$

Longueurs focales :

$$\begin{array}{l} h^2 = a^2 - b^2 \\ k^2 = a^2 - c^2 \end{array} \qquad \Rightarrow \quad h^2 \leq k^2$$

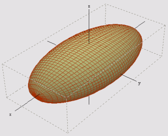
Alors $\Gamma_0 := \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2 - h^2} + \dfrac{z^2}{a^2 - k^2} = 1.$

A un point (x, y, z) on peut associer l'équation $\dfrac{x^2}{s^2} + \dfrac{y^2}{s^2 - h^2} + \dfrac{z^2}{s^2 - k^2} = 1$ où s est inconnue.

Cette équation correspond à

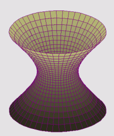
- un ellipsoïde si $k^2 \leq s^2$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$$



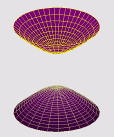
- un hyperboloïde à une nappe si $h^2 \leq s^2 \leq k^2$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{z^2}{C^2} = 1$$



- un hyperboloïde à deux nappes si $s^2 \leq h^2$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{z^2}{C^2} = -1$$



Pour chaque (x, y, z) on a

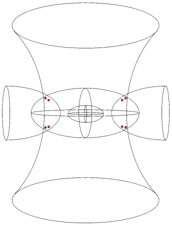
$$\frac{x^2}{s^2} + \frac{y^2}{s^2 - h^2} + \frac{z^2}{s^2 - k^2} = 1 \qquad \Rightarrow \text{ équation d'ordre 3 en } s^2$$

Racines : λ_1^2, λ_2^2 et λ_3^2 et on a $0 \leq \lambda_3^2 \leq h^2 \leq \lambda_2^2 \leq k^2 \leq \lambda_1^2$.

Donc (x, y, z) est à l'intersection entre

- un ellipsoïde de demi-axes $(\sqrt{\lambda_1^2}, \sqrt{\lambda_1^2 - h^2}, \sqrt{\lambda_1^2 - k^2})$
- un hyperboloïde à 1 nappe de demi-axes $(\sqrt{\lambda_2^2}, \sqrt{\lambda_2^2 - h^2}, \sqrt{k^2 - \lambda_2^2})$
- un hyperboloïde à 2 nappes de demi-axes $(\sqrt{\lambda_3^2}, \sqrt{h^2 - \lambda_3^2}, \sqrt{k^2 - \lambda_3^2})$

Coord cart	$\rightarrow$	Coord ellips
(x, y, z)	$\rightarrow$	$(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2)$



Cas particuliers :

1. (x, y, z) est sur Γ_0 :
alors l'ellipsoïde associé à (x,y,z) est Γ_0 :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - h^2} + \frac{z^2}{a^2 - k^2} = 1$$

$\Rightarrow (x, y, z)$ est à l'intersection de Γ_0 et de 2 hyperboloïdes.

2. Γ_0 est une sphère $\Rightarrow a = b = c \Rightarrow k = h = 0$
Alors, l'équation associée à (x, y, z) est l'équation d'un cercle :

$$x^2 + y^2 + z^2 = s^2$$

C'est un cas dégénéré où les hyperboloïdes ne sont pas définis (λ_2^2 et λ_3^2 n'existent pas).

3. $a = b$ ou $b = c \Rightarrow$ un des deux hyperboloïdes n'est pas défini.

MAIS λ_1^2 est toujours définie.

Calculer $(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2)$ numériquement :

1. calcul de valeurs approchées des λ_i^2 par des formules analytiques,
   $\longrightarrow$ formules numériquement instables
2. on en déduit la plus petite valeur entre λ_i^2, $|\lambda_i^2 - h^2|$ et $|\lambda_i^2 - k^2|$,
3. on transforme l'équation cubique pour que la quantité précédente soit la nouvelle racine,
   $\longrightarrow$ pour éviter les petits diviseurs
4. on résoud la nouvelle équation par la méthode des sécantes et on calcule λ_i^2, $|\lambda_i^2 - h^2|$ et $|\lambda_i^2 - k^2|$.

$\Rightarrow$ Bonnes approximations !

Potentiel pour un ellipsoïde :

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2, x_3) &= \frac{3}{2} GM \int_{\lambda_1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x_1^2}{s^2} - \frac{x_2^2}{s^2 - h^2} - \frac{x_3^2}{s^2 - k^2}\right) \frac{ds}{\sqrt{s^2 - h^2}\sqrt{s^2 - k^2}} \\ &= \frac{3}{2} GM \int_{\lambda_1}^{+\infty} f(s, x_1, x_2, x_3) ds \end{aligned}$$

où

- a, b et c ($a \geq b \geq c$) sont les demi-grands axes de l'ellipsoïde
- (x_1, x_2, x_3) sont les coordonnées cartésiennes du point où on veut calculer le potentiel
- λ_1 est la première coordonnée ellipsoïdale de ce point.

Calcul de la force :

$$V(x_1, x_2, x_3) = \frac{3}{2} GM \int_{\lambda_1}^{+\infty} f(s, x_1, x_2, x_3) ds$$

$$\begin{aligned}
F_{x_i} = \frac{\partial V}{\partial x_i} &= \frac{\partial V}{\partial x_i}(x_1, x_2, x_3, \lambda_1 = cste) + \frac{\partial V}{\partial \lambda_1}\frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} \\
&= \frac{3}{2} GM \int_{\lambda_1}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, x_1, x_2, x_3) ds - \frac{3}{2} GM\, f(\lambda_1, x_1, x_2, x_3) \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} \\
&= \frac{3}{2} GM \int_{\lambda_1}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, x_1, x_2, x_3) ds - 0
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
F_{x_1} &= \frac{\partial V}{\partial x_1} = -3x_1 GM \int_{\lambda_1}^{+\infty} \frac{ds}{s^2(s^2-h^2)^{1/2}(s^2-k^2)^{1/2}} \\
F_{x_2} &= \frac{\partial V}{\partial x_2} = -3x_2 GM \int_{\lambda_1}^{+\infty} \frac{ds}{(s^2-h^2)^{3/2}(s^2-k^2)^{1/2}} \\
F_{x_3} &= \frac{\partial V}{\partial x_3} = -3x_3 GM \int_{\lambda_1}^{+\infty} \frac{ds}{(s^2-h^2)^{1/2}(s^2-k^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

Calcul des intégrales : quadrature de Gauss-Legendre après changements de variables (car fonctions strictement monotones)

Tests du nouveau potentiel : article de Rossi (1999)

Variation du noeud ascendant sur des ellipsoïdes axisymétriques (en *rad* s^{-1}) :

	pertubations	polygones	mascon	harmo. Sphér.	intégrale
ellipsoïde avec une orbite circulaire inclinée	-7.7 10^{-6}	-1.09 10^{-5}	-1.11 10^{-5}	-1.07 10^{-5}	-1.11 10^{-5}
ellipsoïde avec une orbite elliptique inclinée	-8.37 10^{-6}	-1.25 10^{-5}	-1.33 10^{-5}	-1.27 10^{-5}	-1.33 10^{-5}
ellipsoïde avec une orbite elliptique inclinée et distante	-7.10 10^{-7}	-7.76 10^{-7}	-7.92 10^{-7}	-7.85 10^{-7}	-7.86 10^{-7}

$\Rightarrow$ résultats convaincants

Indicateur de chaos : le MEGNO

MEGNO = Mean Exponential Growth factor of Nearby Orbits
(Cincotta et Simó, 2000)

Soit :

- Le flot d'un système dynamique à n dim : $\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t))$, $x \in \mathbb{R}^{2n}$.
- $\phi(t)$ l'orbite au temps t
- $\delta_\phi(t)$ un vecteur tangent le long de cette orbite avec $\dot{\delta_\phi} = \frac{\partial f}{\partial x}(\phi(t))\delta_\phi(t)$.

Alors, le MEGNO est

$$Y_\phi(t) = \frac{2}{t}\int_0^t \frac{\dot{\delta}_\phi \cdot \delta_\phi}{\delta_\phi \cdot \delta_\phi}\, s\, ds$$

= caractérisation du taux de divergence entre deux orbites proches.

Orbite périodique	:	$\overline{Y_\phi} \longrightarrow 0$
Orbite quasi-périodique	:	$\overline{Y_\phi} \longrightarrow 2$
Orbite chaotique	:	$\overline{Y_\phi}$ augmente linéairement avec le temps

Tests sur Ida-Dactyl

Tests sur certaines orbites possibles de Dactyl (avec des excentricités pas trop grandes) :

GM[2] ($km^3.sec^{-2}$)	Density[3] ($g.cm^{-3}$)	a[4] (km)	e	i (deg)	Ω (deg)	ω (deg)	f[5] (deg)	w+f (deg)	Period (hrs)	R_p[6] (km)	WRMS[7] (pixels)
0.00180	1.68	39.0	2.77	170.47	-31.26	-27.67	42.04	14.38	-	69.1	0.209
0.00190	1.77	53.1	2.33	170.57	-31.54	-26.69	40.81	14.12	-	70.7	0.181
0.00200	1.86	78.5	1.92	170.68	-31.82	-25.49	39.32	13.83	-	72.5	0.167
0.00210	1.96	132.8	1.56	170.82	-32.10	-24.06	37.60	13.54	-	74.4	0.164
0.00220	2.05	304.1	1.25	170.97	-32.34	-22.42	35.70	13.28	-	76.3	0.168
0.00225	2.10	650.9	1.12	171.04	-32.44	-21.54	34.71	13.17	-	77.2	0.170
0.00230	2.14	7912.0	0.99	171.12	-32.54	-20.51	33.56	13.06	25612.0	78.1	0.174
0.00235	2.19	667.0	0.88	171.19	-32.63	-19.50	32.47	12.97	620.2	79.0	0.177
0.00240	2.24	355.4	0.78	171.27	-32.71	-18.29	31.16	12.87	238.7	79.8	0.180
0.00250	2.33	200.8	0.59	171.41	-32.85	-15.52	28.23	12.71	99.3	81.4	0.185
0.00260	2.42	148.8	0.44	171.56	-32.97	-11.87	24.46	12.58	62.2	82.9	0.190
0.00280	2.61	107.7	0.21	171.84	-33.13	2.54	9.85	12.39	36.9	85.0	0.197
0.00290	2.70	97.6	0.13	171.97	-33.19	21.41	-9.09	12.32	31.3	85.1	0.199
0.00300	2.79	90.5	0.09	172.10	-33.24	63.56	-51.30	12.27	27.5	82.7	0.200
0.00310	2.89	85.4	0.11	172.23	-33.28	107.67	-95.44	12.23	24.7	76.1	0.201
0.00320	2.98	81.4	0.16	172.36	-33.30	127.84	-115.64	12.20	22.7	68.6	0.201
0.00340	3.17	76.0	0.26	172.61	-33.33	142.68	-130.50	12.17	19.8	56.2	0.201
0.00360	3.35	72.4	0.35	172.85	-33.32	148.77	-136.59	12.18	17.9	47.2	0.199
0.00380	3.54	70.1	0.42	173.09	-33.28	152.36	-140.14	12.22	16.6	40.5	0.197
0.00420	3.91	67.4	0.54	173.57	-33.12	156.87	-144.49	12.38	14.9	31.1	0.192

Resultats :

- Crash ou échappée des orbites pour $M \gtrsim 5 \times 10^{16}$ kg
- Orbites régulières pour $M \lesssim 5 \times 10^{16}$ kg

$\Rightarrow$ même résultats que Petit

Cartes de chaos

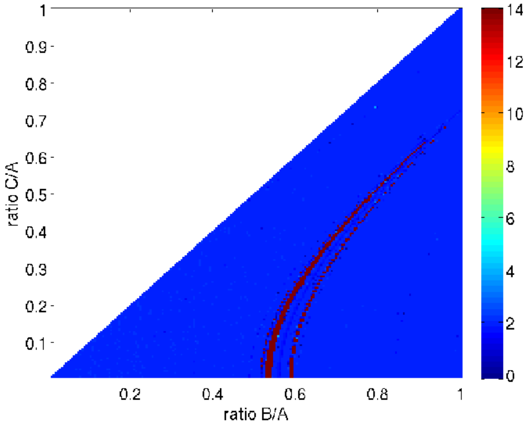
De façon plus générique : Quels systèmes sont stables/chaotiques ?
Y a-t-il des zones de résonances ?

On fixe :

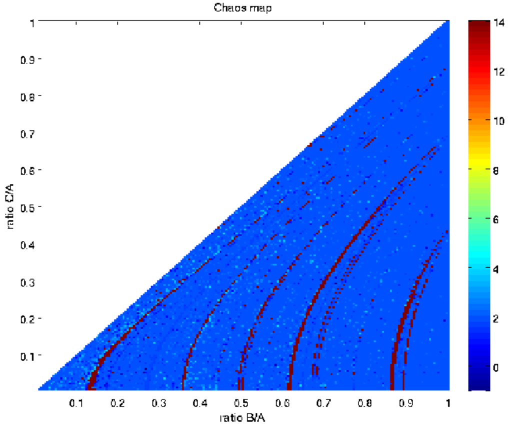
- la masse et la rotation de l'astéroïde (l'ellipsoïde)
- l'orbite initiale du satellite (Valeurs proches du cas Ida-Dactyl)
- a, le plus grand demi-axe de l'ellipsoïde

On fait varier la forme du primaire (les demi-axes b et c).

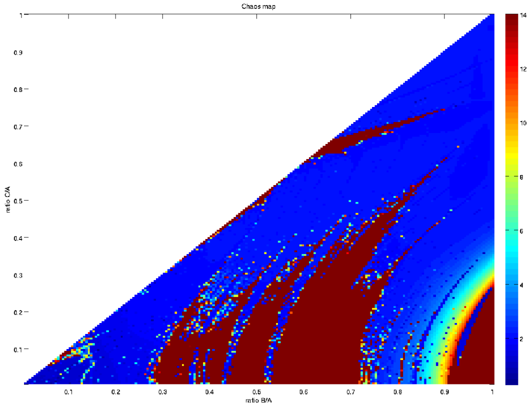
Intégrateur utilisé : Runge-Kutta-Fehlberg à pas variables
Précision : 10^{-12}



M=3.895551 10^{6} kg, orbite initiale adaptée (notamment $i \simeq 2.99$)
et vitesse de rotation $= -3.76687 \times 10^{-4}$ rad/s

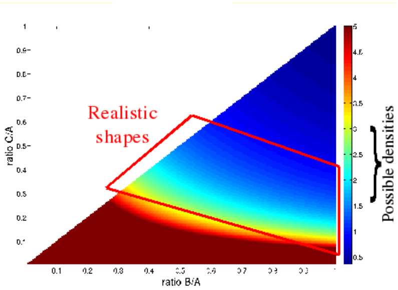


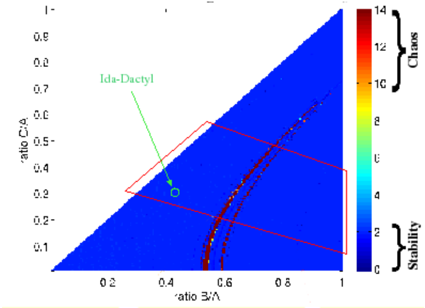
M=3.745722 10^{6} kg, orbite initiale adaptée (notamment $i \simeq 2.99$) et vitesse de rotation $= -3.76687 \times 10^{-4}$ rad/s



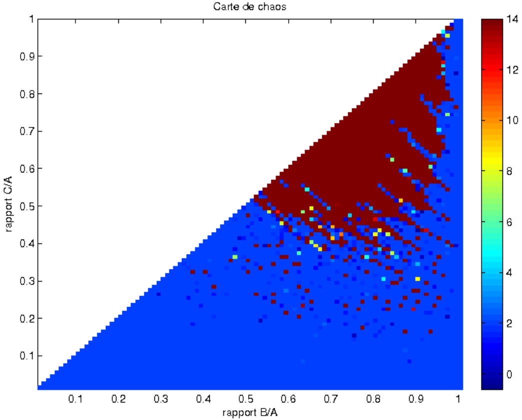
M=5.693498 10^{6} kg, orbite initiale adaptée (notamment $i \simeq 2.99$) et vitesse de rotation = 3.76687×10^{-4} rad/s

Mais dans ces graphiques, la masse est constante.
$\longrightarrow$ toutes les configurations ne sont pas possibles...





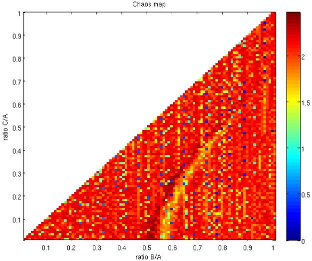
Si on fixe la densité de masse et pas la masse :



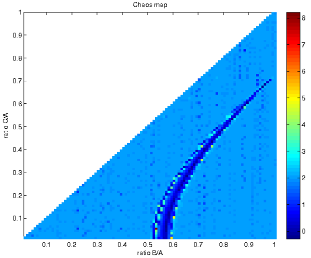
M=3.895551 10^{6} kg, orbite initiale adaptée (notamment $i \simeq 2.99$)
et vitesse de rotation $= -3.76687 \times 10^{-4}$ rad/s

Évolution selon le temps :

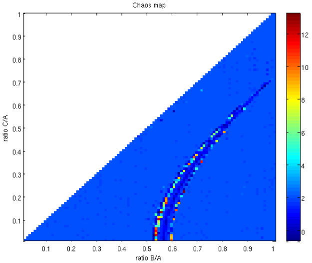
Après 0,1 an :



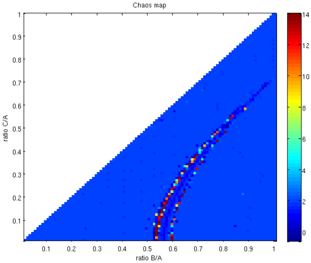
Après 1 an :



Après 5 ans :

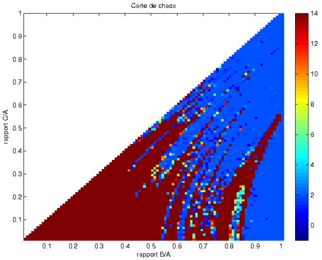


Après 10 ans :

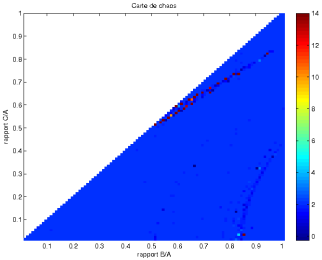


Évolution selon la vitesse de rotation :

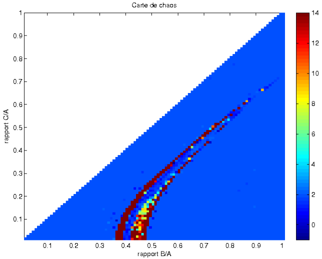
$v = -2.5\ 10^{-4}$ rad/s



$v = -4.0\ 10^{-4}$ rad/s

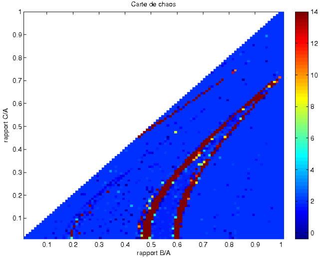


$v = -3.76687\ 10^{-4}$ rad/s
(cas de base)

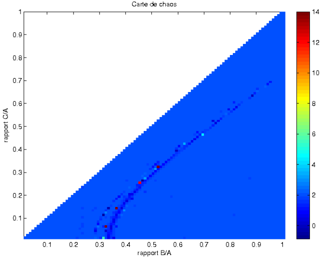


Évolution selon le demi-grand axe :

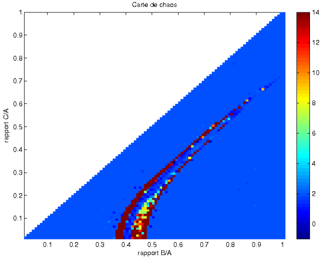
$\overline{a}$=130000 m



$\overline{a}$=170000 m

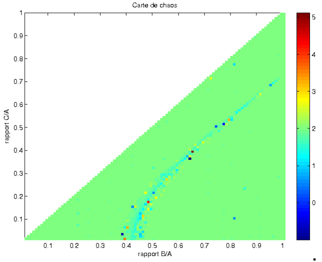


$\overline{a}$=148800 m
(cas de base)

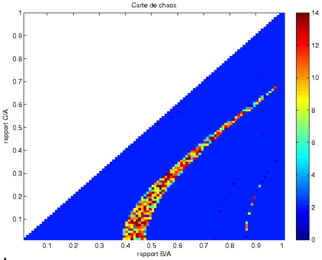


Évolution selon l'inclinaison :

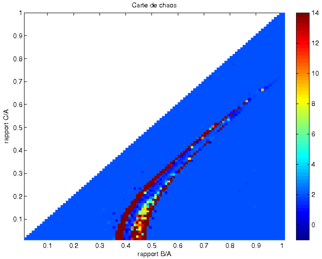
i=3.14 rad



i=2.0 rad



i=2.994287 rad
(cas de base)



Autres changements :

- disparition de la structure si e diminue et apparition de nouvelles si e augmente.
- décalage de la structure vers la droite si on augmente la masse.

Résonance gravitationnelle ?

= résonance entre :

- la rotation sur lui-même du primaire
- la révolution du secondaire.

Ici, on a

- $P = 4,63336736333$ heures pour tous les points du graphique.
- La période de révolution du secondaire est propre à chaque point :

  Tests sur quelques points :

  P_1 : b=18600 m, c=8970 m et $\overline{Y} \to 2$
  P_2 : b=18911 m, c=8970 m et $\overline{Y} \to +\infty$
  P_3 : b=20100 m, c=8970 m et $\overline{Y} \to 2$

	période pour P_1 (jours)	période pour P_2 (jours)	période pour P_3 (jours)
M	$\simeq 2.5$	$\simeq 2.48$	$\simeq 2.48$

$\Rightarrow$ résonance 1:13 ?

Analyse en fréquences

Analyse en fréquence utilisée : FMA de J. Laskar

Principe :

Soit $f(t)$ fonction du temps, régulière et quasi-périodique
Et l'amplitude des coefficients de Fourier de f, a_k décroissent avec k.

$\Rightarrow$ approximation $f'(t)$ du signal donné avec un certain nombre N d'harmoniques.

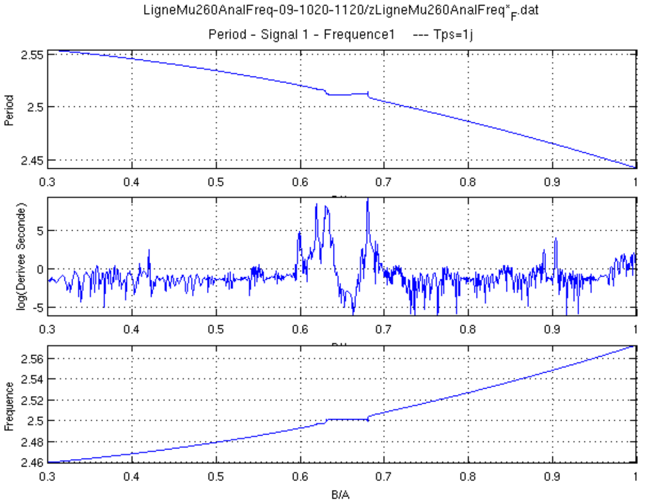
$$f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k e^{i\nu_k t} \quad \Rightarrow \quad f'(t) = \sum_{k=1}^{N} a'_k e^{i\nu'_k t}$$

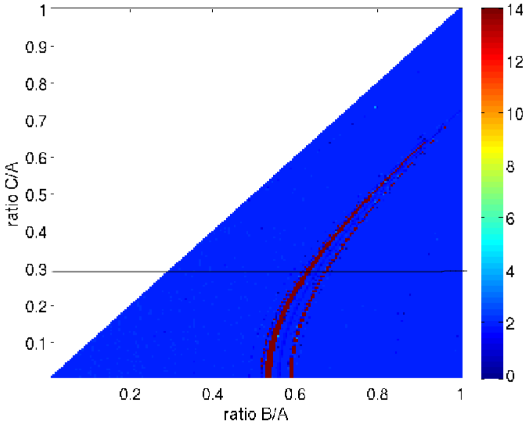
Autre fonction calculée : la dérivée seconde numérique :

$$\delta^2\nu_1(a) = \nu_1(a) - 2\nu_1(a-h) + \nu_1(a-2h).$$

On fixe $c = 8970$ m et b varie.

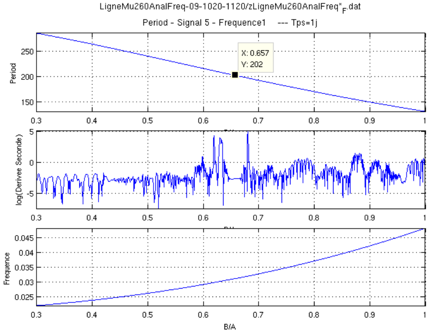
Analyse de $(\overline{a} * cos(M)\,,\, \overline{a} * sin(M))$:



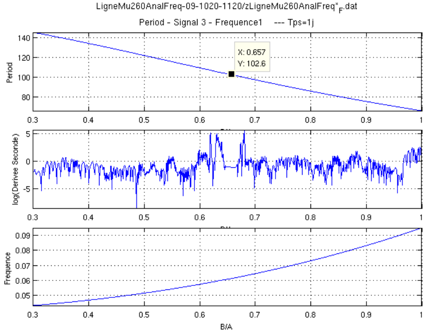


M=3.895551 10^{6} kg, orbite initiale adaptée (notamment $i \simeq 2.99$)
et vitesse de rotation $= -3.76687 \times 10^{-4}$ rad/s

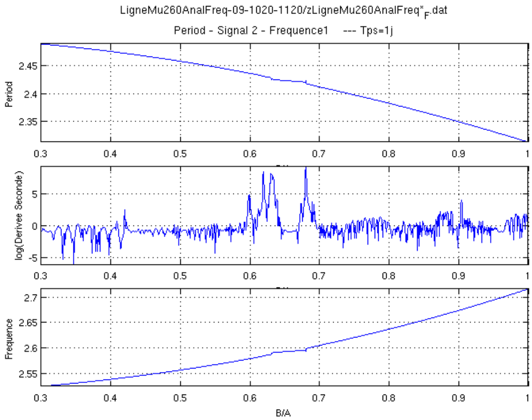
Analyse de $(i * cos(\Omega)\,,\ i * sin(\Omega))$:



Analyse de $(e * cos(\omega)\,,\ e * sin(\omega))$:



Analyse de $(\overline{a} * cos(M + \omega + \Omega)\,,\, \overline{a} * sin(M + \omega + \Omega))$:



Tests sur quelques points :

P_1 : b=18600 m et $\overline{Y} \to 2$
P_2 : b=18911 m et $\overline{Y} \to +\infty$
P_3 : b=20100 m et $\overline{Y} \to 2$

	période pour P_1 (jours)	période pour P_2 (jours)	période pour P_3 (jours)
Ω	212.3	208.0	195.6
ω	108.8	102.7	97.8
M	$\simeq 2.5$	$\simeq 2.48$	$\simeq 2.48$

Résonance entre ces périodes ?

Combien de degrés de liberté ?

- 1 degré pour la rotation du primaire : période de rotation du corps central
- 3 degrés pour la révolution du secondaire :
  - période orbitale
  - période du péricentre
  - période du noeud ascendant

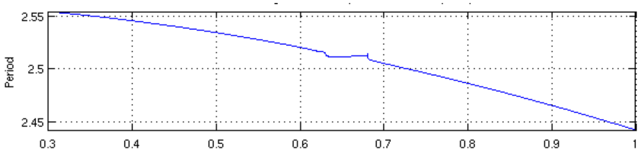
On regarde au centre de la résonance : en $\frac{b}{a} = 0.657$, c-à-d $b = 19644.3$ m.

	période (jours)
θ	0.193057
M	2.512
ω	102.6
Ω	202

$\Rightarrow$ seule résonance possible : entre M et P $\longrightarrow \frac{periode(M)}{periode(\theta)} = 13.01170$.

Pourquoi on ne voit que cette résonance-là (résonance 1:13) ?

- résonance 1:12 $\rightarrow$ $periode(M) = 2.316684$ jours
- résonance 1:14 $\rightarrow$ $periode(M) = 2.702798$ jours



$\Rightarrow$ elles sont toutes les deux en dehors !

Développement analytique

Hypothèses :

- mouvement dans un plan
- e=0
- $\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$ sont petits

Alors,

$$
\begin{aligned}
V &= -\frac{3}{2}\mu \int_{\lambda_1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{s^2} \frac{y^2}{s^2 - h^2}\right) \frac{ds}{\sqrt{s^2 - h^2}\sqrt{s^2 - k^2}} \\
&= -\frac{\mu^4}{10} \frac{a^2}{L^6} (\beta^2 - \frac{1}{2}\alpha^2)
\end{aligned}
$$

avec

- $L^2 = \mu \bar{a}$
- $\alpha^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$ et $\beta^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2}$

$\Rightarrow$ Pas de résultats !

Hypothèses :

- mouvement dans un plan
- $e \neq 0$
- $\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$ sont petits

Alors,

$$
\begin{aligned}
V &= -\frac{3}{2}\mu \int_{\lambda_1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{s^2}\frac{y^2}{s^2 - h^2}\right) \frac{ds}{\sqrt{s^2 - h^2}\sqrt{s^2 - k^2}} \\
&= -\frac{\mu^4}{10}\frac{a^2}{L^6}\left(\frac{1 + e\cos f}{1 - e^2}\right)^3 (\beta^2 - \frac{1}{2}\alpha^2)
\end{aligned}
$$

avec

- f = anomalie vraie

$\Rightarrow$ Pas de résultats !

Validation du code

Différents tests ont été effectués :

- quadrature beaucoup plus fine lors de l'évalution de l'intégrale qui donne le potentiel.
  Résultats : aucuns changements
- ré-estimation du pas à prendre avec rk4 et du pas maximal à fixer avec rkfpv.
  Résultats : nos pas sont bons
- comparaison avec les harmoniques sphériques.

Harmoniques sphériques pour un ellipsoïde :

Formule de Boyce :

$$C_{2l,2m} = \frac{3}{R^{2l}} \frac{l!(2l-2m)!}{2^{2m}(2l+3)(2l+1)!}(2-\delta_{0m})$$

$$\times \sum_{i=0}^{int(\frac{l-m}{2})} \frac{(a^2-b^2)^{m+2i}[c^2-\frac{1}{2}(a^2+b^2)]^{l-m-2i}}{16^i(l-m-2i)!(m+i)!i!}.$$

- Convergence si $a < c\sqrt{2}$
- inconnu sinon.

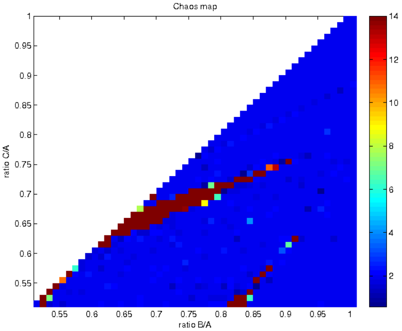
$\Rightarrow$ sur mes graphes : convergence si $\frac{c}{a} > 0,7071$.

Exemples :

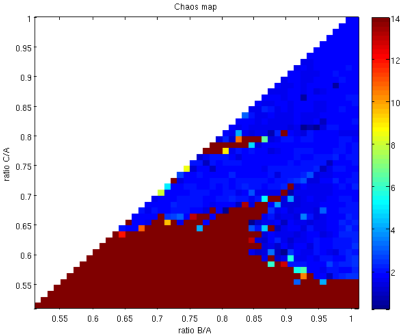
a	29900 m	29900 m
b	10000 m	28000 m
c	8970 m	26000 m
$C_{2,0}$	-4.3156733137e-01	-4.1817931160e-002
$C_{4,0}$	5.8037975027e-01	3.9606477331e-003
$C_{6,0}$	-1.1303748396e+00	-5.0963813726e-004
$C_{8,0}$	2.6506957835e+00	7.7985151531e-005
$C_{10,0}$	-6.9577618257e+00	-1.3361078353e-005
$C_{12,0}$	1.9706713052e+01	2.4777372592e-006
$C_{14,0}$	-5.8964373824e+01	-4.8694330662e-007
$C_{16,0}$	1.8390123894e+02	1.0000677338e-007
$C_{18,0}$	-5.9250198027e+02	-2.1257486879e-008
$C_{20,0}$	1.9595087764e+03	4.6444819273e-009
$C_{22,0}$	-6.6212123506e+03	-1.0378097561e-009
$C_{24,0}$	2.2779138040e+04	2.3627171723e-010
$C_{26,0}$	-7.9573531082e+04	-5.4646141845e-011
$C_{28,0}$	2.8164489220e+05	1.2810751944e-011
$C_{30,0}$	-1.0083012948e+06	-3.0385796524e-012
$C_{32,0}$	3.6460708700e+06	7.2813245135e-013
$C_{34,0}$	-1.3301579353e+07	-1.7606394581e-013
$C_{36,0}$	4.8910742504e+07	4.2915608520e-014

Exemple : M=5.693498 10^6 kg, et vitesse de rotation = 3.76687×10^{-4} rad/s

Avec le potentiel ellipsoïdal :

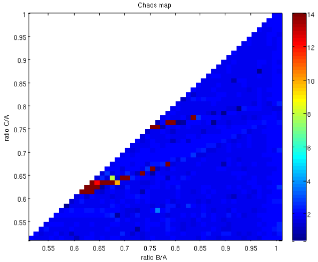


Avec les harmoniques sphériques : (jusqu'à $C_{18,18}$)

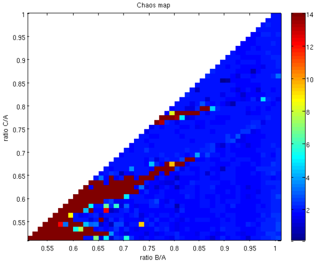


Évolution selon le nombre d'harmoniques :

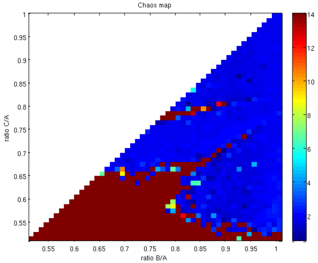
jusque $C_{2,2}$



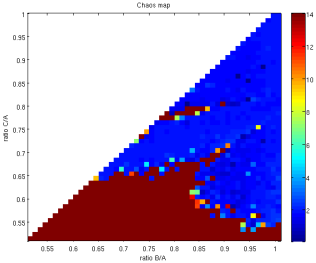
jusque $C_{4,4}$



jusque $C_{8,8}$



jusque $C_{12,12}$



Merci !

Références

- **Scheeres D. J.**, Stability of Binary Asteroids, in *Icarus*, **159**, 271-283, 2002
- **Scheeres D. J.**, Relative Equilibria for General Gravity Field in th Sphere-Restricted Full 2-Body problem, in *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **94**, 317-349, 2006
- **Petit J-M, Durda D., Greenberg R., Hurford T. A., Geissler P. E.**, The Long-Term Dynamics of Dactyl's Orbit, in *Icarus*, **130**, 177-197, 1997
- **Rossi A., Marzari F., Farinella P.**, Orbital Evolution around Irregular Bodies, in *Earth Planets Space*, **51**, 1173-1180, 1999
- **Garmier R., Barriot J-P**, Ellipsoidal Harmonic Expansions of the Gravitational Potential : Theory and Application, in *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **79**, 235-275, 2001