

# Document de travail !

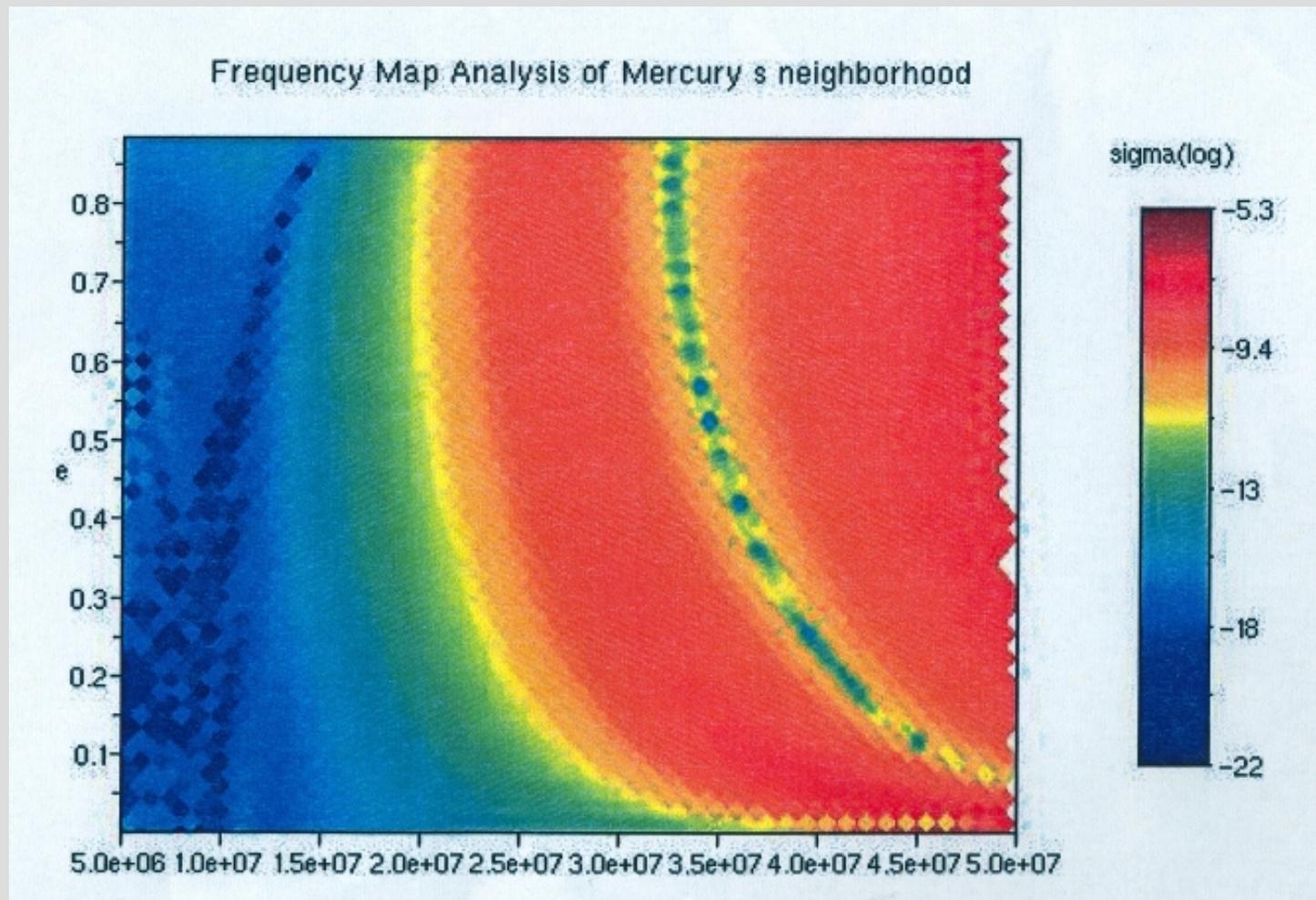
Survola de la dynamique de sondes du style de  
BepiColombo (autour de Mercure donc)

01 / 07 / 2009

Nicolas Delsate

# Raisons de cette étude

- Retrouver les résultats de Benoît Meyssignac !



# Information sur Mercure et BC

- Vérification des résultats de Garcia et al, (Analyse de mission BC)

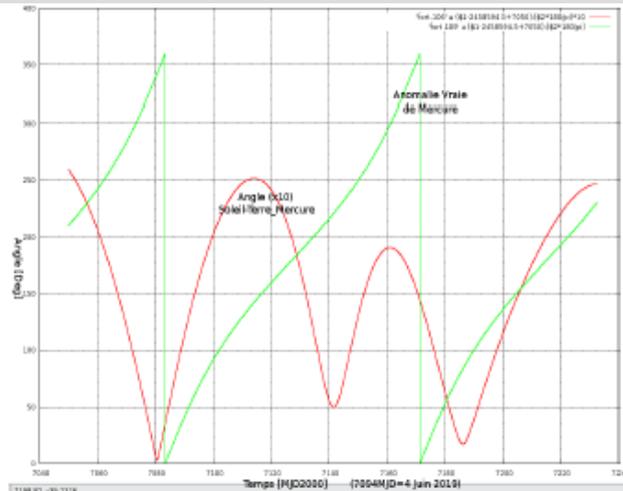


FIG. 1.1 – Evolution de l'anomalie vraie de Mercure et de l'angle Soleil-Terre-Mercure (x10).

FIG. 1.4 – Points de Lagrange et sphere pour La Terre.

	MPO Mercury Planetary Orbiter	MMO Mercury Magnetospheric Orbiter
$A/m$ ( $m^2/kg$ )	0.004	0.01
$a$ (km)	3394	8552
$h_a$ (km)	1508	11824
$h_p$ (km)	400	400
$e$	0.163229	0.667914
$T$ (h)	2.325 (159.5min)	9.3
$v_a$ (km/s)	2.161	0.716
$v_p$ (km/s)	3.004	3.597
$i$ (°)	90.0	90.0
$\Omega_N$ (°)	247.7	247.7
$\Omega_S$ (°)	67.7	67.7
$\omega_N$ (°)	196.0	178.0
$\omega_S$ (°)	16.0	-2.0

TAB. 1.2 – Eléments orbitaux de la sonde BepiColombo (MMO et MPO) dans le système équatorial de Mercure au 14 Septembre 2019 à 9 :29 UT. Les indices 'N' et 'S' réfère respectivement à une approche par le Nord ou par le Sud.

# Perturbations Orbitales

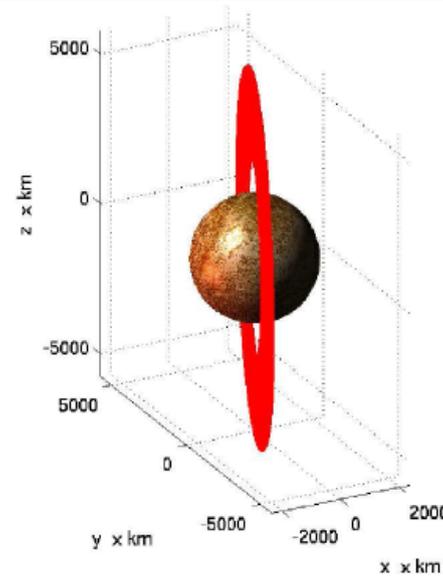
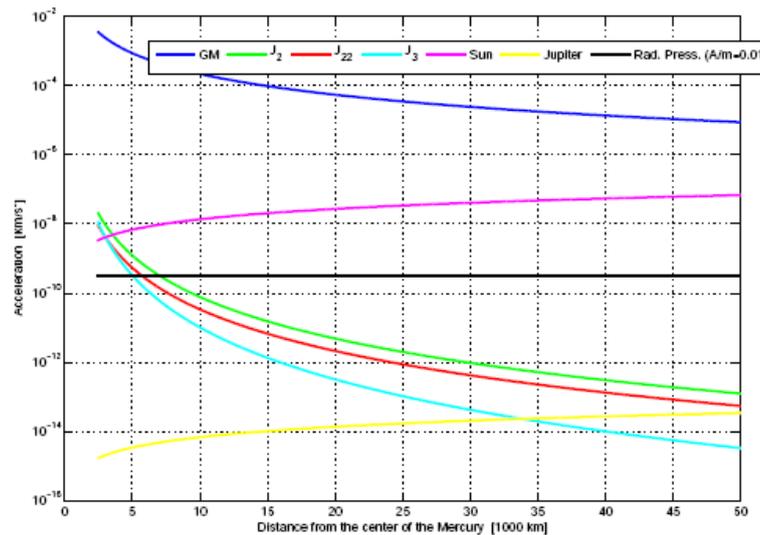


FIG. 1.5 – Amplitude des forces agissant sur des sondes en orbites au orbite de sonde polaire autour de Mercure.

Precession dû à J2

$$\dot{\Omega} = -\frac{3}{2} J_2 \sqrt{\frac{\mu_m}{a^3}} \left(\frac{R_{Eq}}{a}\right)^2 \frac{\cos i}{(1-e^2)^2}$$

Précession dû au soleil

$$\dot{\Omega} = \frac{3\mu_3(1-e^2)^3(2-3\sin^2 i_3)}{8r_3^3 \sqrt{\frac{\mu_m}{a^3}} (1-e_3^2)^{\frac{3}{2}}} (1+5e^2) \cos i$$

$$\dot{\omega} = \frac{3}{4} J_2 \sqrt{\frac{\mu_m}{a^3}} \left(\frac{R_{Eq}}{a}\right)^2 \frac{5 \cos^2 i - 1}{(1-e^2)^2}$$

$$\dot{\omega} = \frac{3\mu_3(1-e^2)^3(2-3\sin^2 i_3)}{8r_3^3 \sqrt{\frac{\mu_m}{a^3}} (1-e_3^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{2} \left\{ 4 - 5 \sin^2 i + 5e^2 \left( 3 - \frac{7}{2} \sin^2 i \right) \right\}$$

# Précessions dues à J2 et au soleil égales

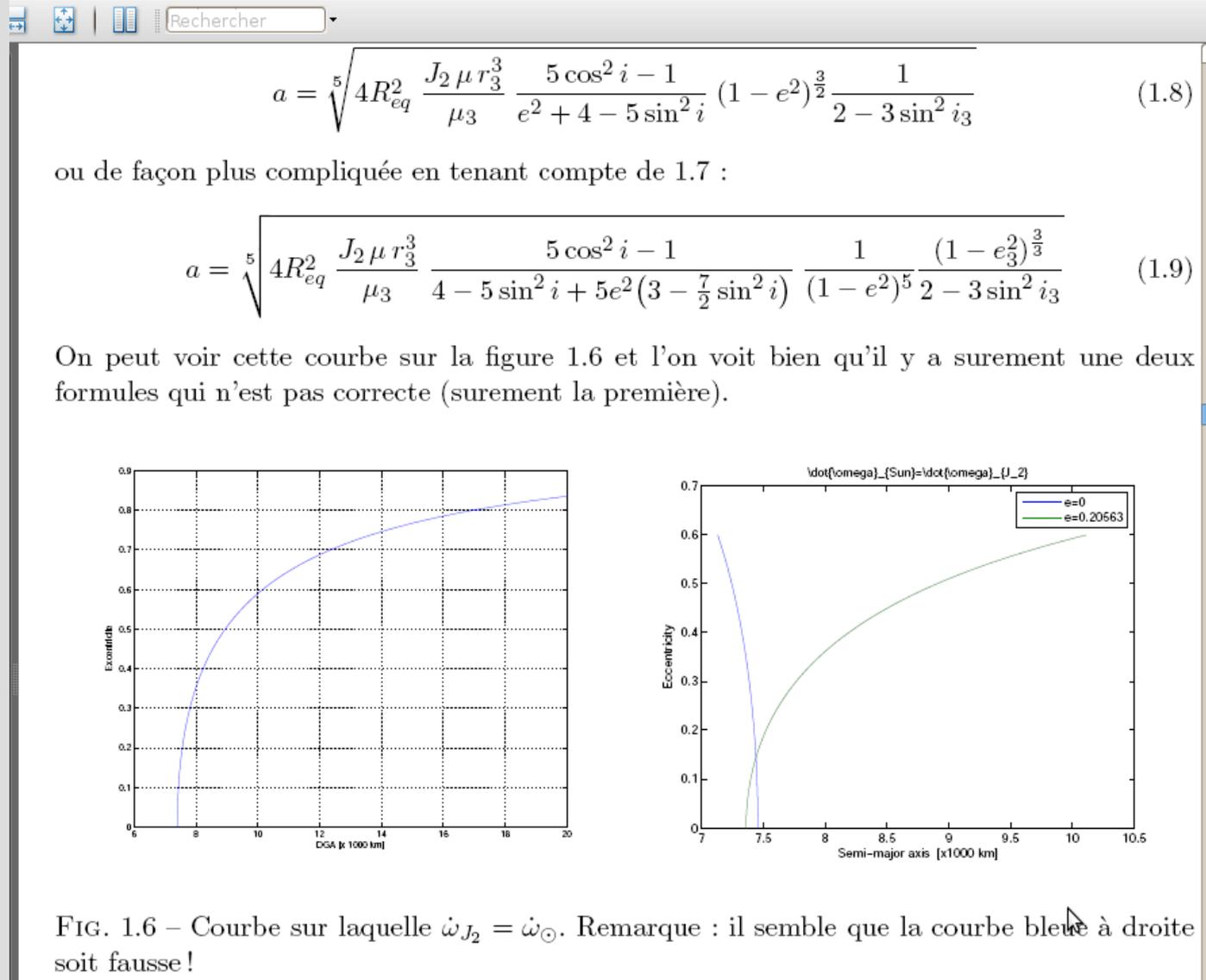


FIG. 1.6 – Courbe sur laquelle  $\dot{\omega}_{J_2} = \dot{\omega}_{\odot}$ . Remarque : il semble que la courbe bleue à droite soit fausse !

# Orbites MPO (dga=3500 km)

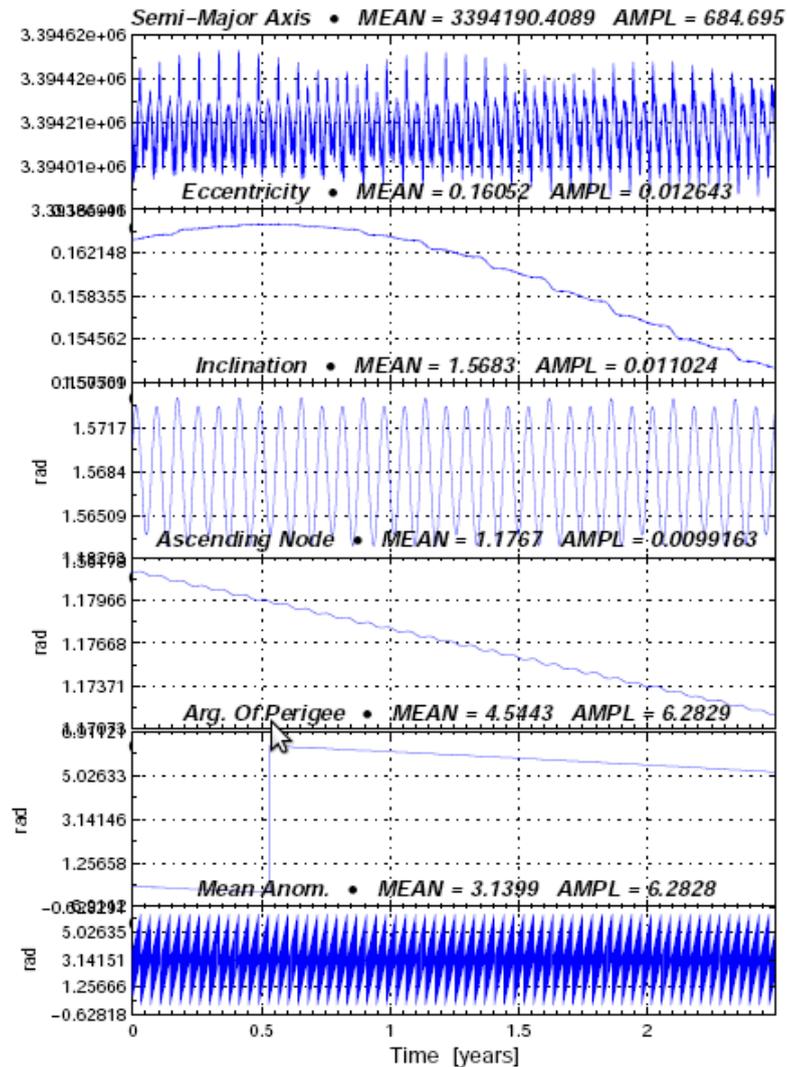


FIG. 1.9 – Evolution de l'orbite du MPO sous l'effet du  $J_2$  et du  $C_{22}$  et du Soleil.

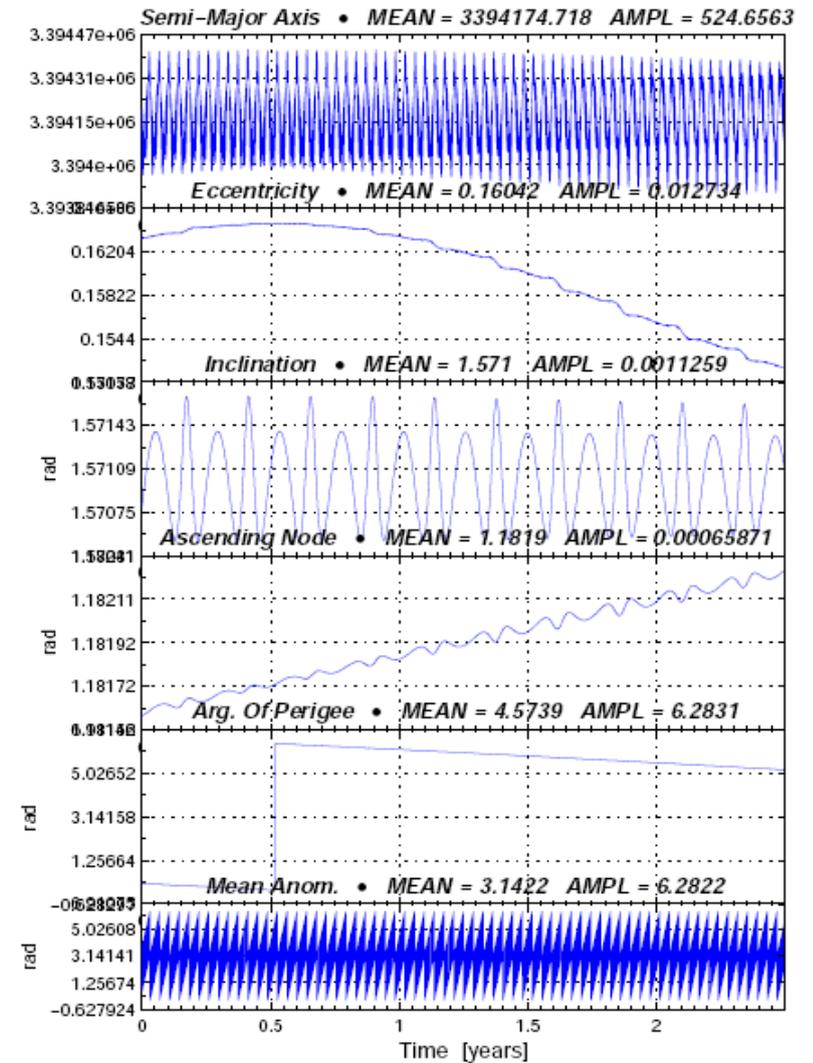


FIG. 1.8 – Evolution de l'orbite du MPO sous l'effet du  $J_2$  et du Soleil.

# Orbites MMO (dga=8500 km)

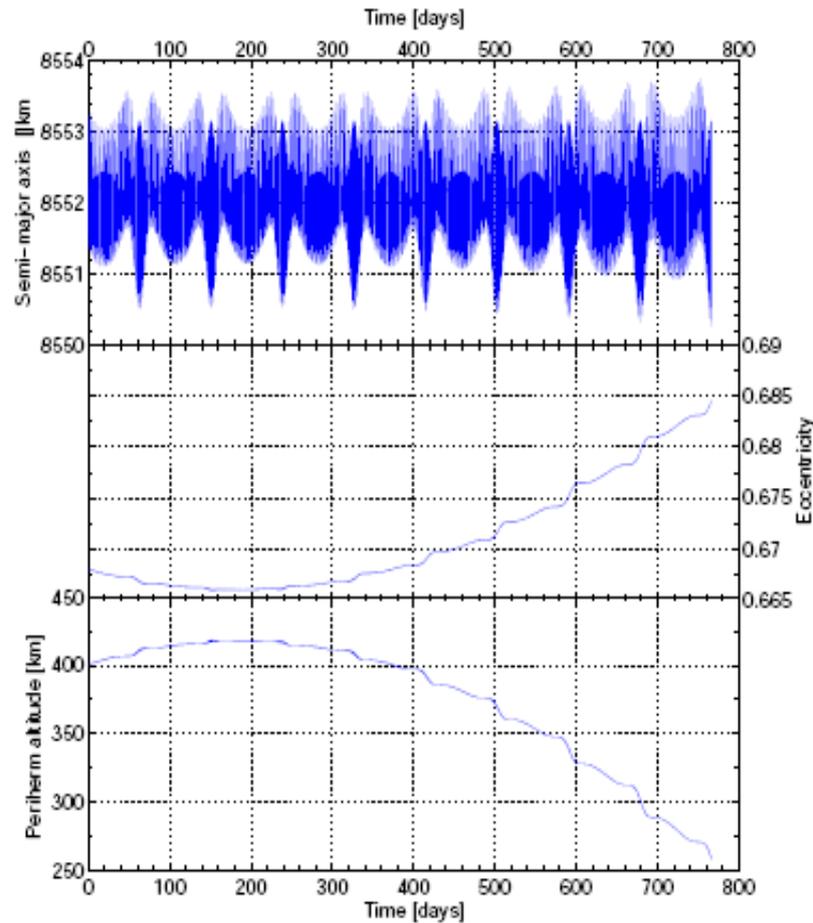


FIG. 1.7 – Evolution du demi-grand axe, excentricité et altitude du périherm du MMO Sud sur 2.5 ans.

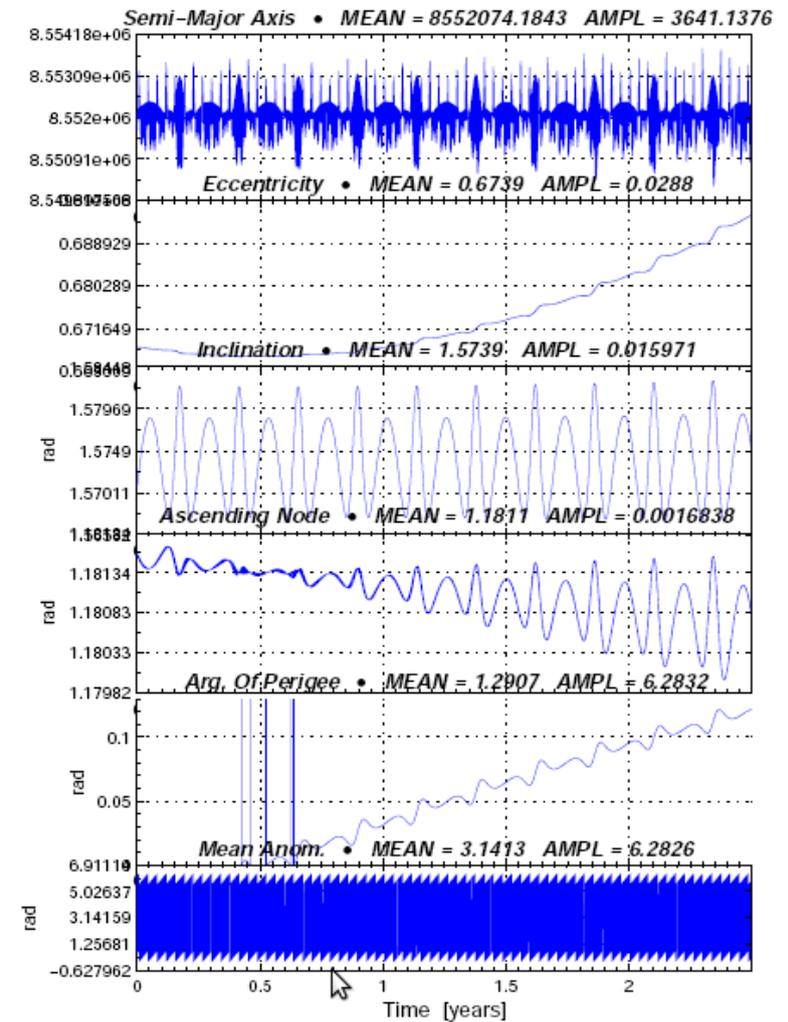


FIG. 1.10 – Evolution de l'orbite du MMO sous l'effet du  $J_2$  et du Soleil.

# Evolution du couple (i,e)

## « Résonance »

## Kozai-Lidov

- Pblm 3 corps :  
Soleil-  
Mercure-  
sonde
- Excentricité  
augmente !
- Cas particulier  
 $i = \pi/2$  pas traité

$$(1 - e^2) \cos^2 i = c \quad (1.10)$$

où la constante  $c$  dépende des valeurs initiales de  $e$  et  $i$  de l'orbite du satellite. Le mouvement admet également une autre intégrale du mouvement qui est

$$e^2 \left( \frac{2}{5} - \sin^2 \omega \sin^2 i \right) = h_0 \quad (1.11)$$

Après avoir éliminé  $e$  dans 1.11 grâce à 1.10, l'intégrale devient

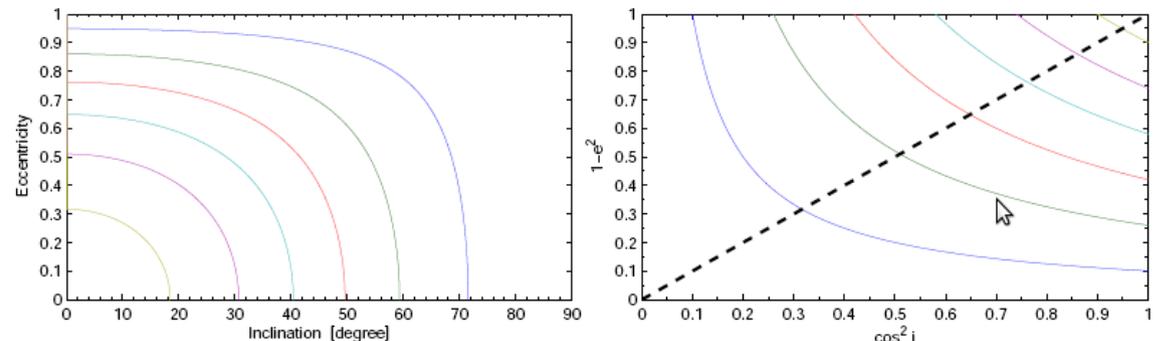
$$\sin^2 \omega = \frac{\cos^2 i (2 - 5h_0) - 2c}{(1 - \cos^2 i)(\cos^2 i - c)} \quad (1.12)$$

La formule 1.12 permet de définir aisément les valeurs de  $\sin^2 \omega$  en fonction de  $\cos^2 i$  pour des valeurs fixées de  $c$  et pour différentes valeurs de  $h_0$ .

????????????????????????????????

Etudions maintenant l'allure des courbes intégrales 1.10 sur le plan  $(\cos^2 i, 1 - e^2)$  pour différentes valeurs de la constante  $c$ . Les courbes sont des hyperboles équilatères par rapport aux variables  $\cos^2 i$  et  $1 - e^2$ . Avec l'évolution de l'orbite du satellite, son excentricité  $e$  et son inclinaison  $i$  varient de telle façon que le point représentatif sur le plan  $(\cos^2 i, 1 - e^2)$  oscille sur l'hyperbole qui correspond à la valeur de la constante  $c$ .

Si l'inclinaison initiale est proche de  $\pi/2$ , l'orbite même si elle est initialement circulaire tant à s'allonger très fortement. Ce qui peut donc provoquer un crash de la sonde.



Evolution de l'orbite (e,i) de bepicolombo (dga=10000km)  
 En fonction de l'inclinaison et excentricité initiale.  
 Ref : Beletski - Essais sur le mouvement des corps cosmiques

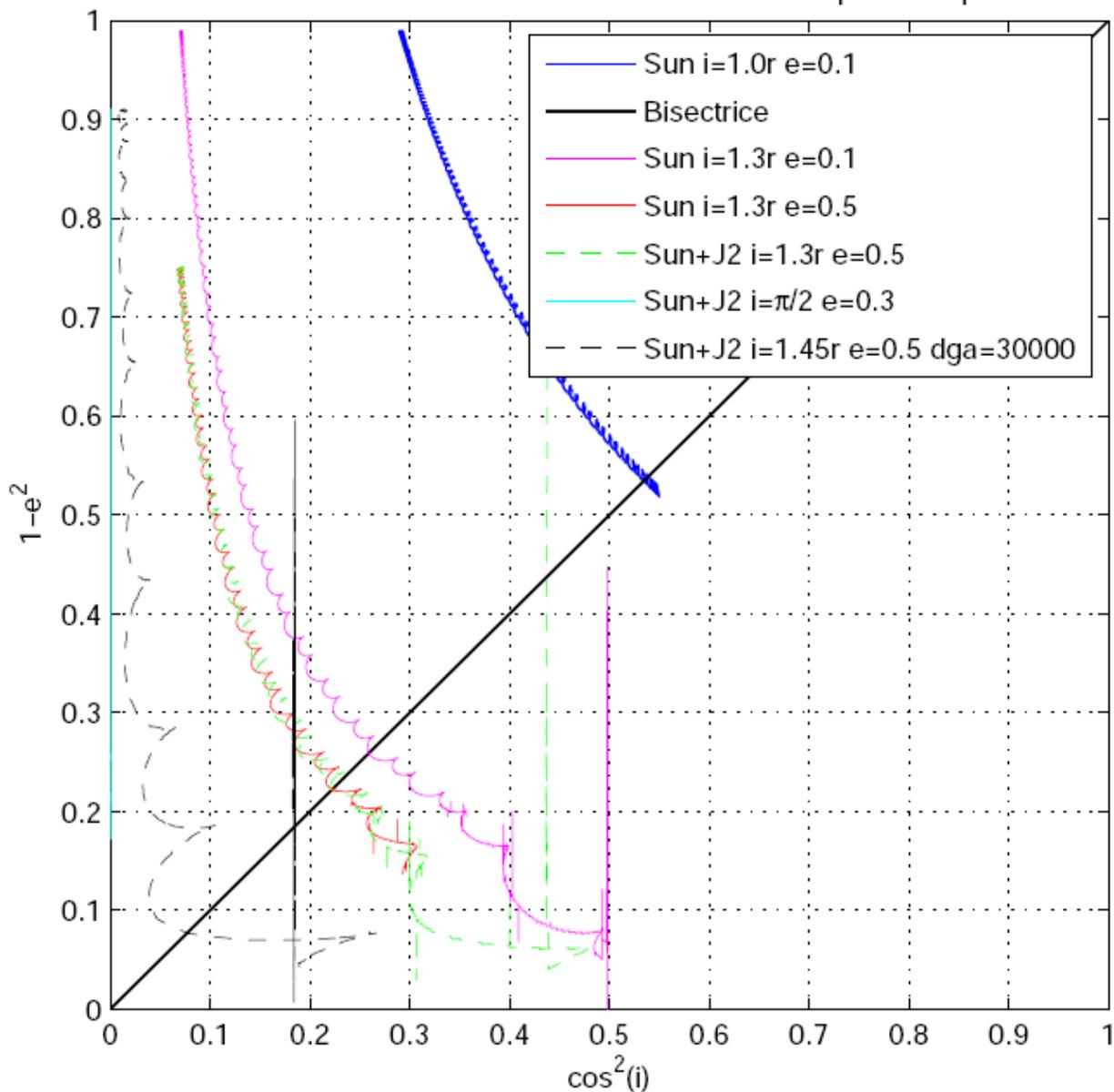


FIG. 1.12 – Evolution du couple  $(\cos^2 i, 1 - e^2)$  d'une sonde polaire autour de Mercure dû à la perturbation gravitationnelle du Soleil.

# Etudes des périodes

$$T = \sqrt{\frac{a^3}{\mu} \frac{2\pi}{86400}}$$

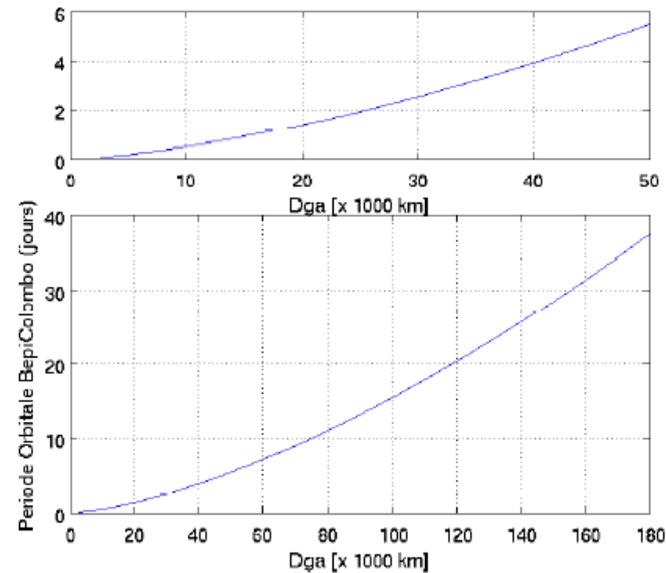


FIG. 1.13 – Evolution de la période de révolution d'un orbiter autour de Mercure.

Demi-grand axe km	Excentricité	Période calculée du périherm jours
2900	0.78	-368
2600	0.88	-83*
127600	0.0	-880
180000	0.0	-523.8

TAB. 1.3 – Quelques période du péricentre d'une sonde polaire autour de Mercure. On tient compte du  $J_2$  et de l'influence gravitationnelle du soleil.

\* Condition initiale menant à une orbite qui traverse la planète dès le début.

# Résonances évection ?

- Sonde est polaire, dans la sphère de Hill de Mercure. J2 + Soleil. Recherche résonance entre les angles => NEANT !

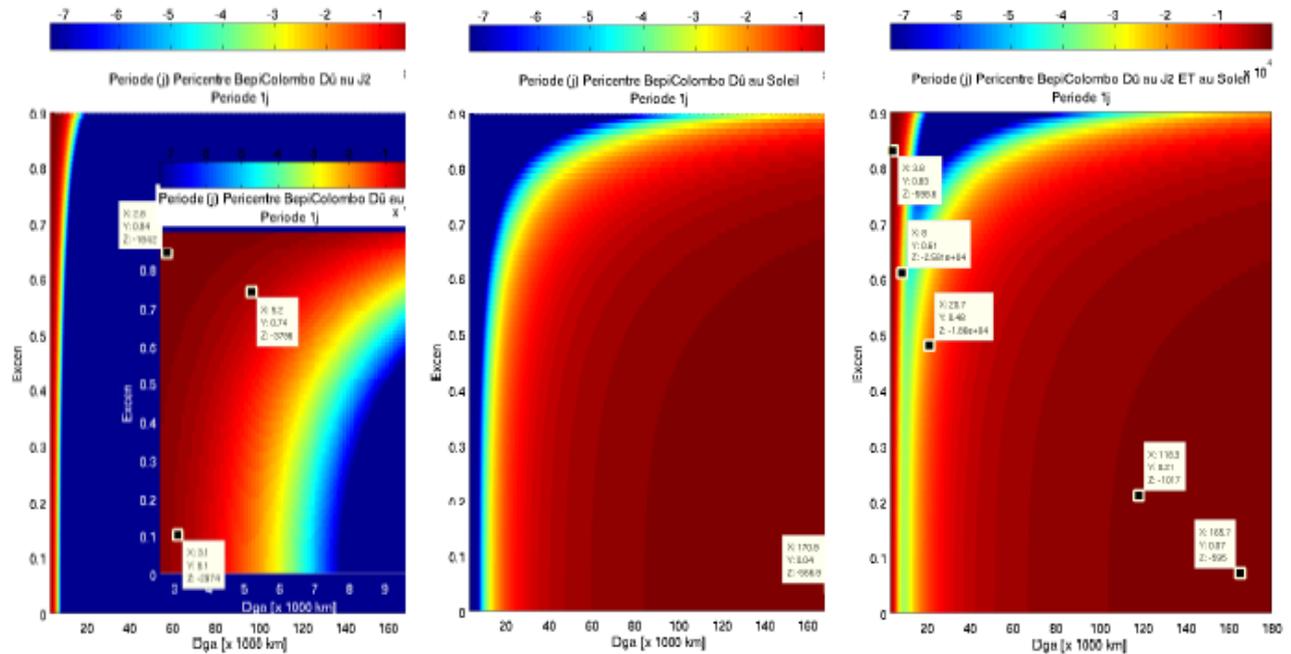


FIG. 1.14 – Evolution du périherm des sondes polaires de Mercure en fonction de la force perturbatrice. Les périodes sont tronquées à 73 000 jours soit 200 ans.

Nom de l'angle	Initiale	Période
Longitude moyenne de la sonde	$\lambda$	entre 1h et 35 jours
Longitude moyenne du soleil	$\lambda_{\odot}$	87.9693 jours
argument du périherm	$\omega$	500 jours
rotation de Mercure	$\theta$	58.6462 jours

Angle 1	Angle 2	Résonance ?
$\lambda$	$\omega$	Impossible
$\lambda$	$\lambda_{\odot}$	Tres faible et très loin : 2/5 à 175000 km et 1 : 5 à 107000 km
$\lambda$	$\theta$	Très faible et très loin : 1/2 à 153000 km, 1/5 à 83000 km
$\omega$	$\lambda_{\odot}$	Non ou trop loin ou très proche (crash)
$\omega$	$\theta$	oui mais loin et d'ordre élevé : 1/10 à 70000 km, 1/4 à 125000 km, 1/3 à 150000 km

TAB. 1.4 – Possible résonance entre des angles de notre système.

# Pistes à creuser - Néant

- Ajout de la pression de radiation (pr orbite haute), ? le noeud accélère ou pas et si l'excentricité évolue différemment. Peut-être aussi un effet sur l'inclinaison. => **TROP FAIBLE et i bloquée**
- Ajouter J3 pour augmenter la vitesse de précession du périherm. Mais cela ne sera sûrement pas suffisant sauf si J3 est très grand. => **NON faible**
- Résonance du périherm de la sonde avec Jupiter. Possible puisque la période du périherm prend des valeurs qui tourne à plusieurs endroits autour de multiple de la période de Jupiter de 11.86 ans. => **TROP FAIBLE**
- Regarder peut-être la période de l'inclinaison. **i bloquée**
- Regarder la période de tous les éléments lors de l'ajout de C22 pour les sondes en orbite basse. **Pas grand chose**
- Faire entrer en résonance le périherm de la sonde avec l'angle résonant  $3\theta - 2\lambda_{\odot}$  qui à une période de 12.6 ans. **Impossible tellement l'amplitude de ce nouvel angle est petit.**

# Analyse en fréquence : cartes

- BUT : reproduire les résultats de Benoit Meyssignac du CNES.
- Modèle : soleil et Mercure ponctuel,
- L'ajout de J2 et C22 ne change « rien » aux cartes sur l'échelle de temps sur laquelle benoit travaillait,
- Pas de crash ... !!! ...
- On analyse  $a \cdot \exp(i l)$  où  $l$  est la longitude moyenne de la sonde.

# Soleil + crash (Req) 6 ans

- Soleil + crash (Req)
- +ou- indépendant de l'intégrateur, du pas, J2, ...
- 6ans ou 3ans +ou- pareil
- Différences entre la carte de la dérivée seconde et de la diffusion de la fréquence !
- Pas la même chose que Benoit.

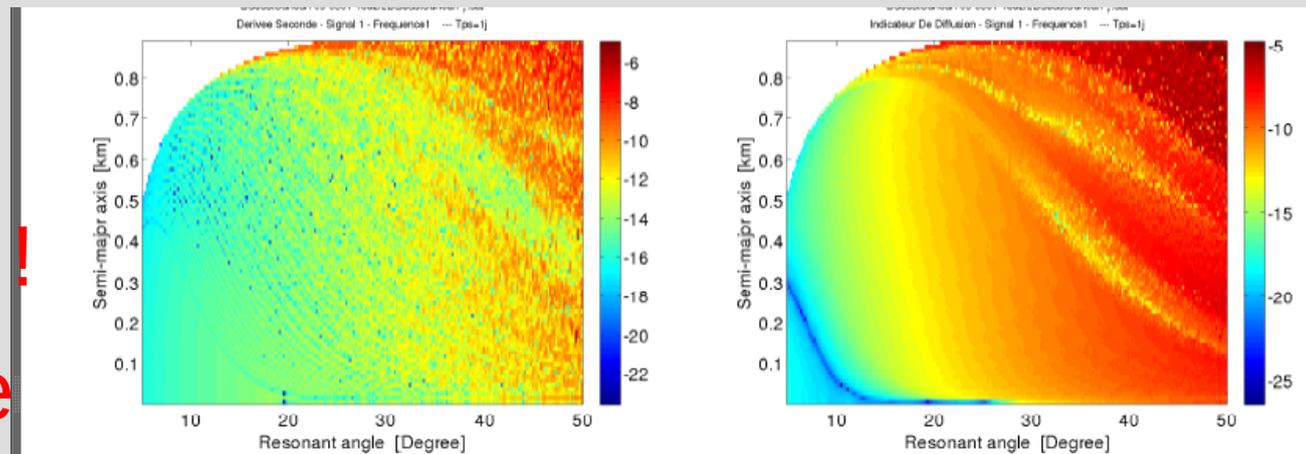


FIG. 2.1 – Dérivée seconde (gauche) et diffusion de la fréquence principale de  $\lambda$ . Forces : Soleil gravitationnel. Temps d'intégration 6ans. Crash possible. Runge-Kutta-Fhelberg (pas 150sec - tabulation 37 et 36).

# Soleil + crash (<900km) 3 ans

- Crash < 900 km
- Différent de Benoit mais même échelles et presque mêmes structures !
- **Différence entre les deux cartes**

- Vérif de qqs orbites (gros points)

- + MEGNO=2

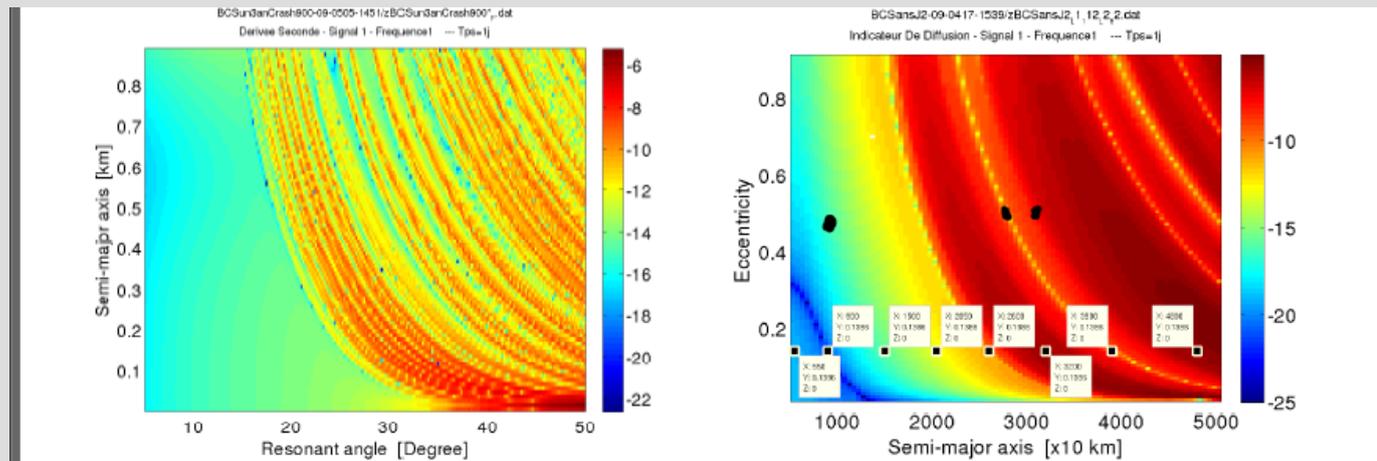
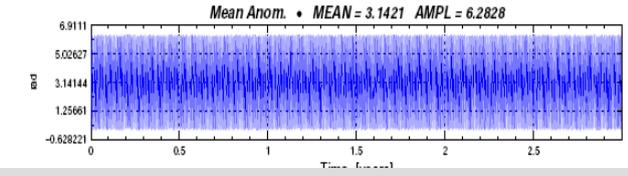
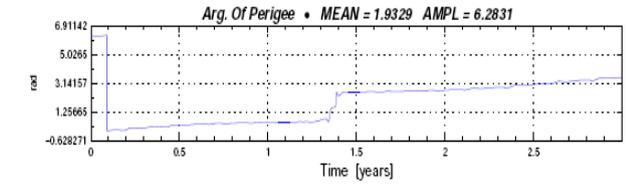
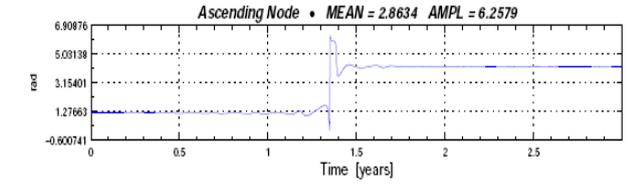
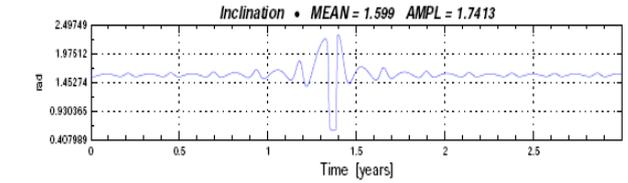
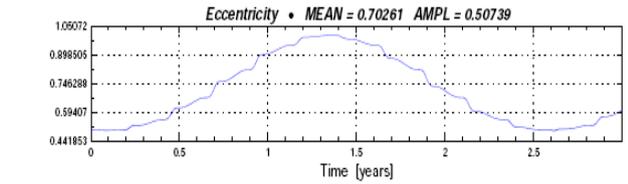
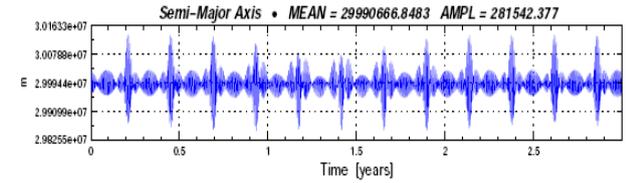
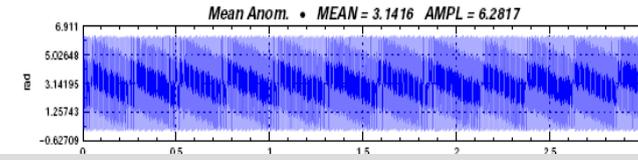
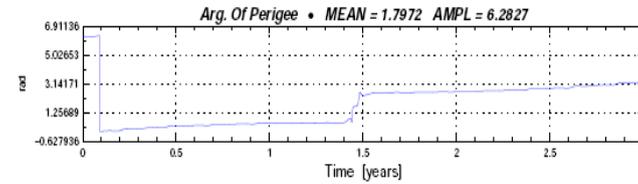
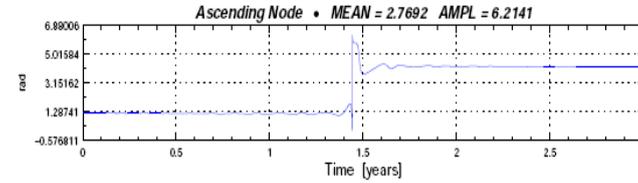
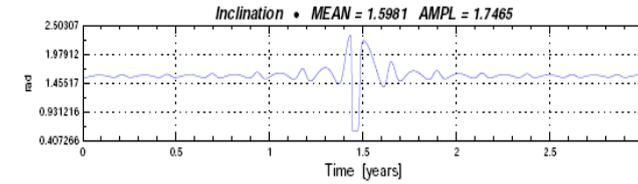
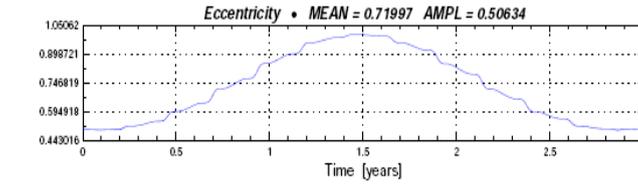
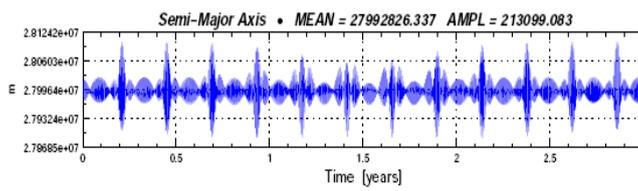
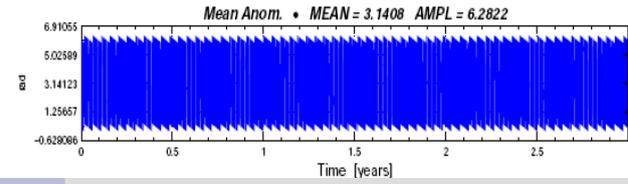
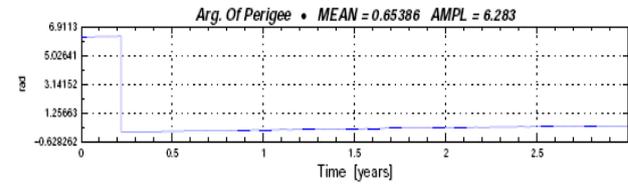
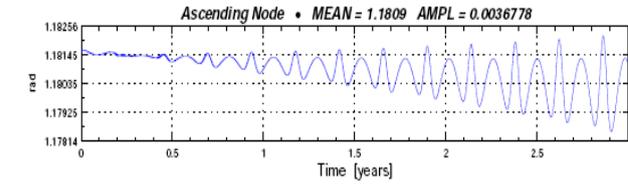
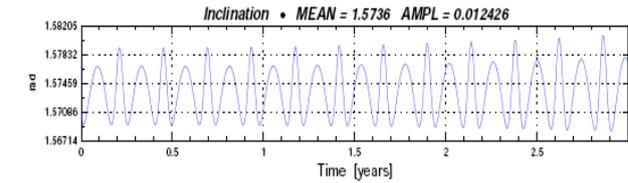
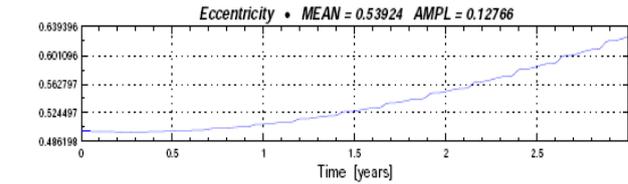
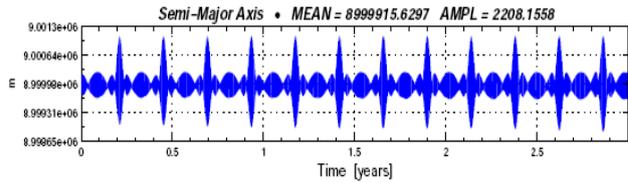


FIG. 2.2 – Dérivée seconde (gauche) et diffusion de la fréquence principale de  $\lambda$ . Forces : Soleil gravitationnel. Temps d'intégration 3ans. Crash possible sous 900 km. Runge-Kutta-Fehlberg (pas 150sec - tabulation 37 et 36).

# Qq Orbites de la carte



# Conclusions des maps

- On constate que la **dynamique est la même**. Si on laissait courir le temps plus longtemps pour les 2 premiers on aurait en fait la 3ème.. De plus, la figure 2 semble plus stable (car sur une ligne jaune dans la map) est **symétrique sur le mouvement de l'excentricité** et ceci n'est pas le cas sur la figure 3. En fait, la diffusion est obtenue en calculant la fréquence principale du signal sur la première et puis sur la deuxième moitié du signal complet. Et c'est apparemment ce calcul et la symétrie qui fait que le niveau de diffusion est plus faible et semble donc indiquer que **les orbites sont plus stables. Ce qui n'est pas le cas**.
- En conclusion, nous venons de pointer les deux artefacts de calculs qui induisent de mauvaises conclusions : le **crash et le temps d'intégration insuffisant**.

# MAP : seconde analyse T>>>

Vu les résultats décevants des parties précédentes, j'ai abandonné l'idée de retrouver les résultats de Benoit. Dorénavant, je vais essayer d'intégrer assez longtemps pour me débarrasser des problèmes liés à la non-détermination des fréquences dû à un temps d'intégration trop court. Je tiendrai compte du crash ou pas (rayon égal à 900 km). Mais de façon générale, même si le rayon est plus petit, les sondes en orbite polaire ne restent pas en orbite (éjection ou crash) au-delà de 13000 km de demi-grand axe. Voici les résultats.

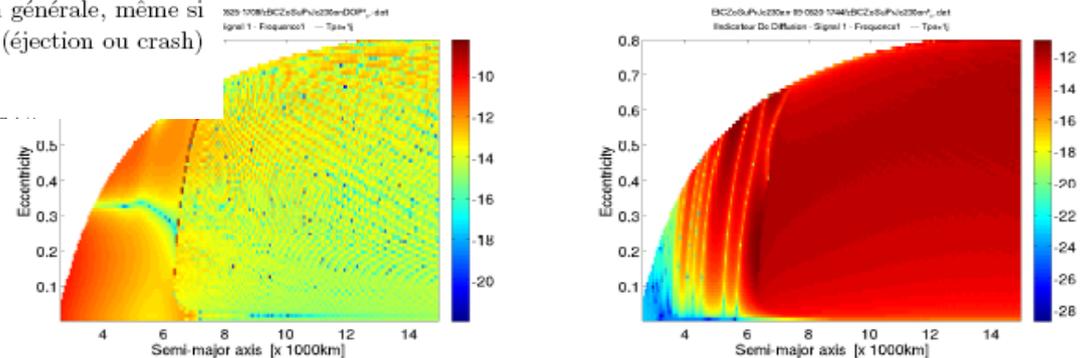
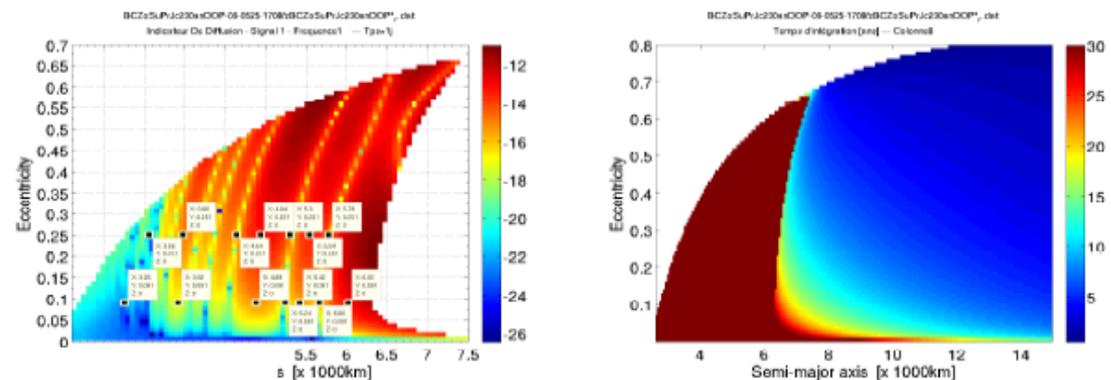


FIG. 2.8 – Dérivée seconde (gauche) et diffusion de la fréquence principale de  $\lambda$ . Forces : Soleil gravitationnel et pression de radiation ( $0.01 m^2/kg$ ),  $J_2$  et  $C_{22}$ . Temps d'intégration 30ans. Crash possible. DOPRI853 ou Bulirsch (pas 150sec - tabulation 10 et 11).



On constate premièrement que tout ce qui se trouve au-delà de 6000 km de demi-grand axe a dû se crasher pendant l'intégration puisque le temps d'intégration est plus court. Cette partie ne nous intéresse donc pas. Ensuite, nous pouvons voir des structures intéressantes apparaissant bien dans le zoom. Cependant, sur la dérivée seconde, rien ne correspond. En effet, ces structures sont une fois de plus dû au temps d'intégration trop court. La partie

om de la figure 2.8.droite. À gauche, le temps d'intégration réelle de

# Là galère pcq il y a rien à trouver !

- La seule chose qui à retenu l'attention de Philippe et moi était cet histoire de l'excentricité qui tout d'un coup n'augmente plus comme Kozai-Lidov le prévoit !
- $i=\pi/2$  très spécial ! Apparemment ça n'intéresse pas les gens qui font du Kozai-Lidov.

# Vecteur Excentricité – Evolution 1

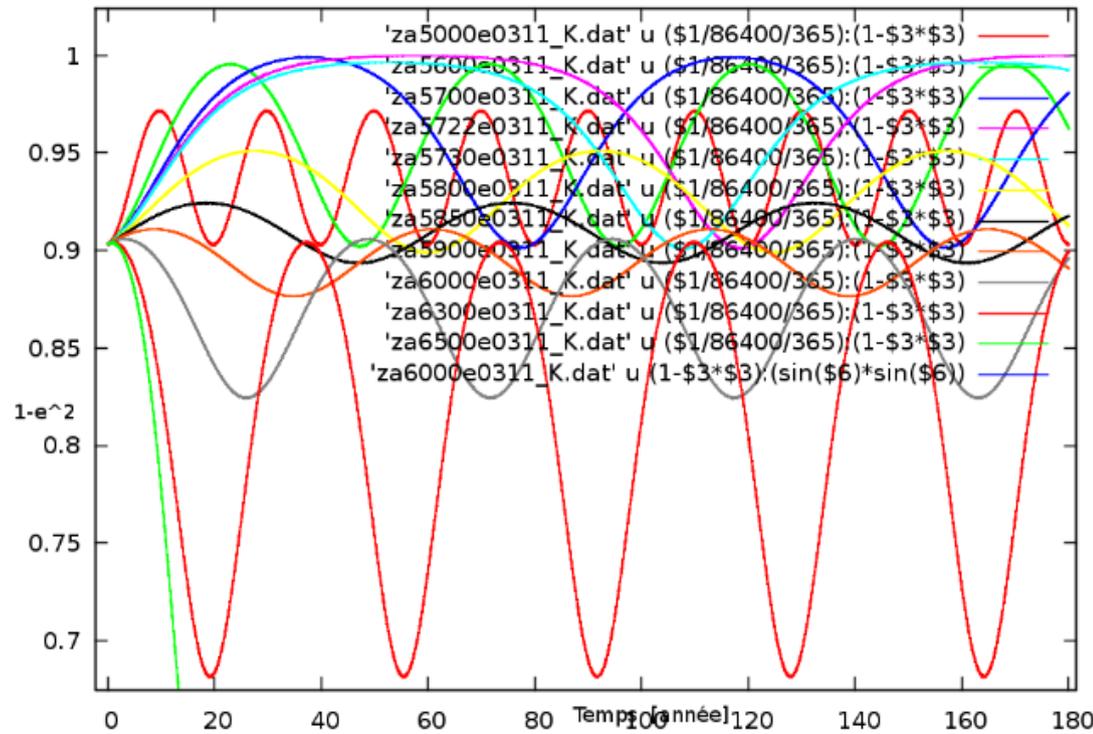
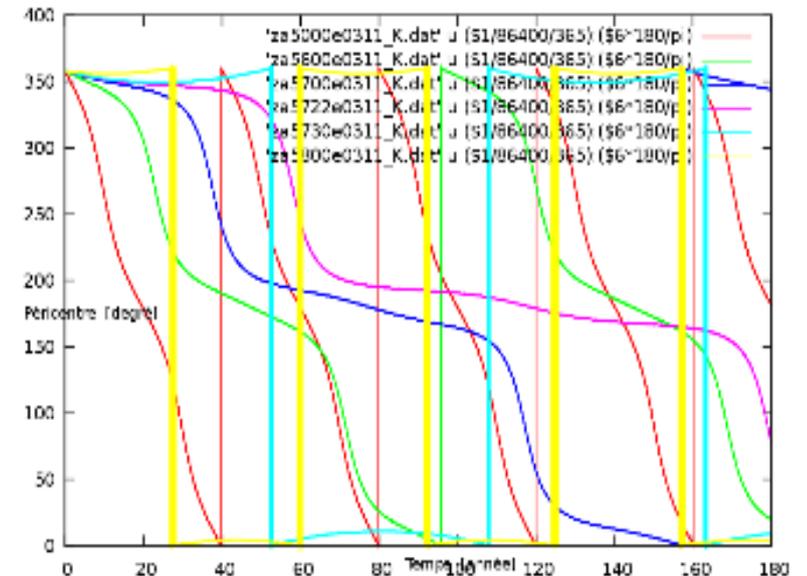
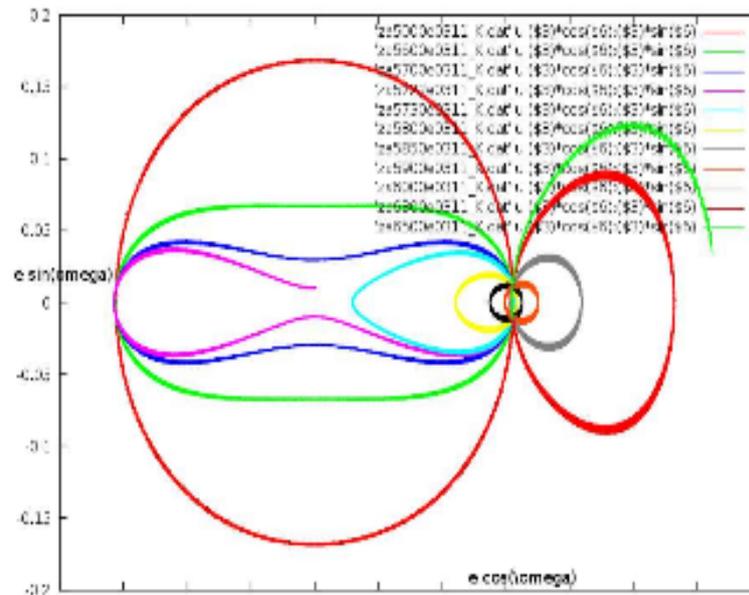
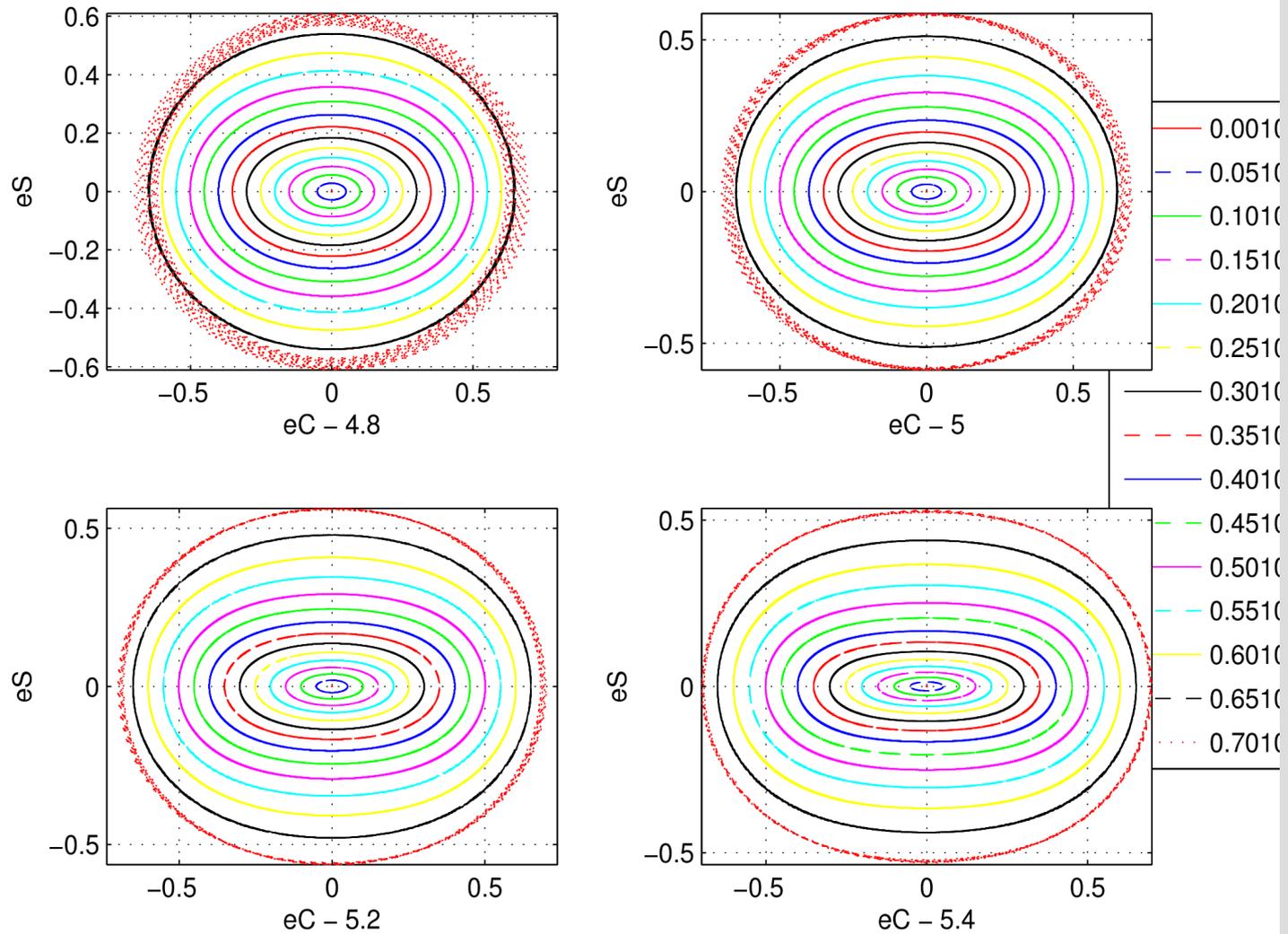


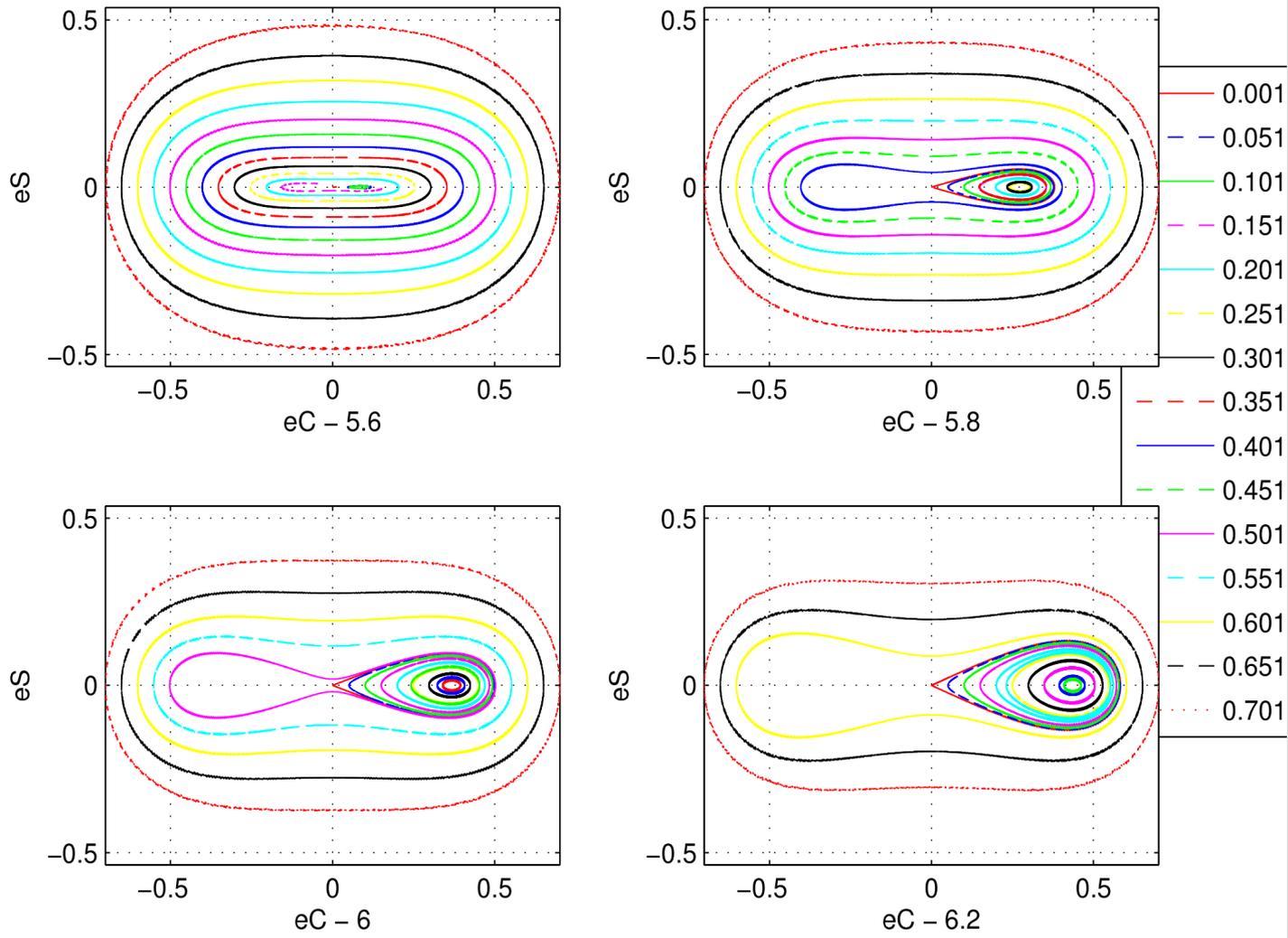
Fig. 2.9. Evolution



# Vecteur Excentricité – Evolution 2



# Vecteur Excentricité – Evolution 3



# Analyse théorique : Satellite Dynamics on the Laplace Surface Tremaine – Touma - Namouni

- Hamiltonien képlérien :

$$H_K = \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r} = \frac{GM}{a}$$

- Potentiel quadrupole dû à J2 :

$$\Phi_p(\mathbf{r}) = \frac{GMJ_2R_p^2}{r^3}P_2(\cos\theta) = \frac{GMJ_2R_p^2}{2r^5} \left[ 3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_p)^2 - r^2 \right]$$

- Quadrupole du potentiel solaire :

$$\Phi_{\odot} r = \frac{GM_{\odot}}{4a_{\odot}^3(1 - e_{\odot}^2)^{3/2}} \left[ 3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_{\odot})^2 - r^2 \right]$$

# On moyennise

Notons que le rayon de Hill est donnée par l'équation  $r_H = a_{\odot} \left( \frac{M}{3M_{\odot}} \right)^{1/3}$ . Maintenant on moyenne sur l'orbite képlérienne de la particule test, qui est le demi-grand axe  $a$ , l'excentricité  $e$ , l'orientation spécifiée par le vecteur unité  $\mathbf{n}$  lelong du vecteur moment angulaire  $L$ ,  $\mathbf{u}$  vers le péricentre et  $\mathbf{v} = \mathbf{n} \times \mathbf{u}$ . Nous avons :

$$\begin{aligned}
 \langle r^2 \rangle &= a^2 \left( 1 + \frac{3}{2}e^2 \right), \\
 \langle (\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})^2 \rangle &= a^2 \left( \frac{1}{2} + 2e^2 \right), \\
 \langle (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 \rangle &= a^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^2 \right), \\
 \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle &= \frac{1}{a^3(1-e^2)^{3/2}}, \\
 \left\langle \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})^2}{r^5} \right\rangle &= \left\langle \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2}{r^5} \right\rangle = \frac{1}{2a^3(1-e^2)^{3/2}}.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

L'hamiltonien moyenné s'écrit donc

$$\begin{aligned}
 H &= H_K + \bar{\Phi}_p + \bar{\Phi}_{\odot}, \\
 \bar{\Phi}_p &\equiv \langle \Phi_p \rangle = \frac{GMJ_2R_p^2}{4a^3(1-e^2)^{3/2}} \left[ 1 - 3(\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{n})^2 \right] \\
 \bar{\Phi}_{\odot} &\equiv \langle \Phi_{\odot} \rangle = \frac{GM_{\odot}a^2}{4a^3(1-e_{\odot}^2)^{3/2}} \left[ \left( \frac{1}{2} + 2e^2 \right) (\mathbf{n}_{\odot} \cdot \mathbf{u})^2 + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^2 \right) (\mathbf{n}_{\odot} \cdot \mathbf{v})^2 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{3} \right]
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Nous posons maintenant  $j \equiv \sqrt{1 - e^2} n$   $e = eu$   $\tau = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} t$   $\varepsilon_p = \frac{J_2 R_p^2}{a^2}$   $\varepsilon_\odot = \frac{M_\odot a^3}{M a_\odot^3 (1 - e_\odot^2)^{3/2}}$ .

On peut dédimensionner le tout en divisant nos potentiel par  $GM/a$ . Donc l'hamiltonien à ce niveau est basé sur les suppositions (que nous vérifions dans mon cas) que

- le taux de précession du spin de la planète du au marée solaire est négligeable,
- le satellite est considéré comme une particule test sans masse,
- le Soleil est assez loin de la planète pour que la marée solaire puisse être approximé par un quadropole,
- le satellite est assez loin de la planète tel que le potentiel puisse être approximé par un monopole plus un quadropole (par forcément notre cas, mais nous ne connaissons tout de façon à peine le  $C_{22}...$ ),
- les forces perturbatives (Soleil et  $J_2$ ) sont fortes assez pour que les équations séculaires du mouvement puissent être utilisées pour décrire l'évolution orbitale (nous sommes dans ce cas, car les mouvement osculateur ne change pas beaucoup l'évolution de l'orbite).

#### 4.2.2 Equations séculaires du mouvement

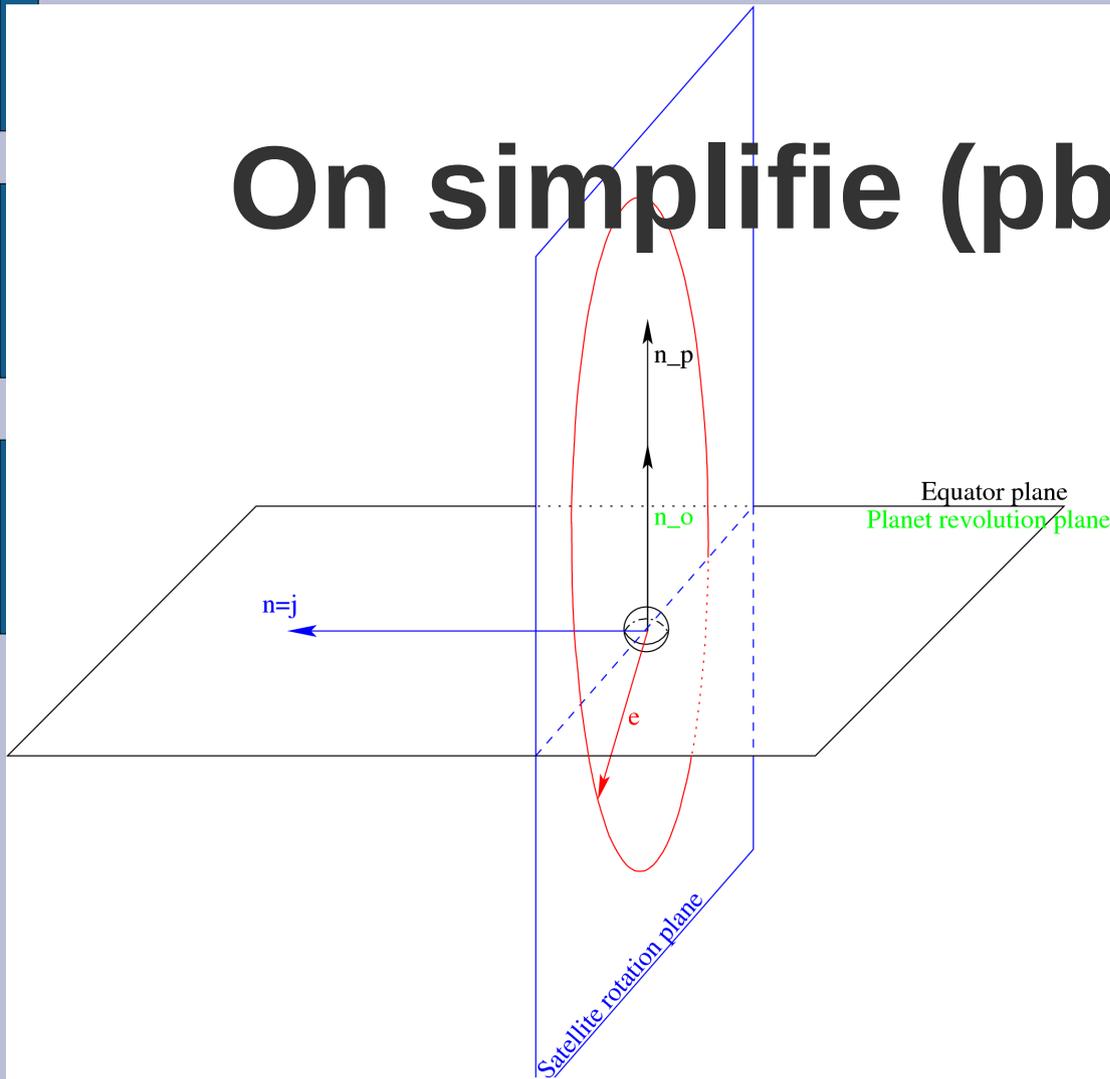
Il est possible (on passe les calculs ici) d'écrire les équations du mouvement en  $(j, e)$  :

$$\begin{aligned} \frac{dj}{d\tau} &= \frac{3\varepsilon_\odot j \cdot n_\odot}{4} j \times n_\odot - \frac{15\varepsilon_\odot e \cdot n_\odot}{4} e \times n_\odot \\ &\quad + \frac{3\varepsilon_p j \cdot n_p}{2(1-e^2)^{5/2}} j \times n_p \\ \frac{de}{d\tau} &= \frac{3\varepsilon_\odot j \cdot n_\odot}{4} e \times n_\odot - \frac{15\varepsilon_\odot e \cdot n_\odot}{4} j \times n_\odot \\ &\quad + \frac{3\varepsilon_p j \cdot n_p}{2(1-e^2)^{5/2}} e \times n_p \\ &\quad + \left[ \frac{3}{2} \varepsilon_\odot - \frac{3}{4} \varepsilon_p \frac{1-e^2-5(j \cdot n_p)^2}{(1-e^2)^{7/2}} \right] j \times e. \end{aligned} \tag{4.3}$$

$\varepsilon_p$  et  $\varepsilon_\odot$  sont tous les deux strictement positif. Ces équations sont valables quelque soit la valeur de l'excentricité. Si  $\varepsilon_p \rightarrow 0$  alors nous avons à faire à du Kozai-Lidov pure. Nous définissons également le rayon de Laplace

$$r_L^5 = J_2 R_p^2 a_\odot^3 (1 - e_\odot^2)^{3/2} \frac{M}{M_\odot}. \tag{4.4}$$

# On simplifie (pblm particulier)



Voici maintenant la figure 4.5 représentant le cas général de la théorie (à droite) et le cas particulier qui nous intéresse par la suite (à gauche).

Si l'on tient compte de la géométrie de notre problème nous avons que  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}_p = \mathbf{j} \cdot \mathbf{n}_\odot = \vec{0}$ .  
Les équations 4.3 se simplifient donc et nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{j}}{d\tau} &= -\frac{15\varepsilon_\odot \mathbf{e} \mathbf{n}_\odot}{4} \mathbf{e} \times \mathbf{n}_\odot \\ \frac{d\mathbf{e}}{d\tau} &= -\frac{15\varepsilon_\odot \mathbf{e} \mathbf{n}_\odot}{4} \mathbf{j} \times \mathbf{n}_\odot + \left[ \frac{3}{2}\varepsilon_\odot - \frac{3}{4}\varepsilon_p \frac{1}{(1-e^2)^{5/2}} \right] \mathbf{j} \times \mathbf{e}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

# Excentricité nulle

On tient compte ici d'une excentricité nulle et on va rechercher le point fixe de l'espace de phase. Pour cela prenons donc  $e = 0$ . L'équation du vecteur excentricité dans 4.5 devient

$$\frac{de}{d\tau} = - \underbrace{\frac{15\varepsilon_{\odot}}{4}}_{\alpha} e \cdot n_{\odot} j \times n_{\odot} + \underbrace{\left[ \frac{3}{2}\varepsilon_{\odot} - \frac{3}{4}\varepsilon_p \right]}_{\beta} j \times e. \quad (4.6)$$

Etude du système  $\dot{e} = A e$

Si  $\lambda^2 < 0$  alors l'équilibre est stable donc nous devons

$$\lambda^2 = - \underbrace{\left( \frac{3}{2}\varepsilon_{\odot} - \frac{3}{4}\varepsilon_p \right)}_{\beta} \underbrace{\|j\|^2}_{\geq 0} \left( -\frac{9}{4}\varepsilon_{\odot} - \frac{3}{4}\varepsilon_p \right) < 0$$

Soit  $\beta > 0$  et donc il faut que  $3\varepsilon_{\odot} < -\varepsilon_p$  ce qui n'est pas possible puisque  $\varepsilon_{\odot} > 0$  et  $\varepsilon_p > 0$ .  
Donc  $\beta < 0$  ce qui implique que

$$2\varepsilon_{\odot} < \varepsilon_p \quad \iff \quad a < 2^{-1/5} r_L \quad (4.7)$$

Ce qui pour une sonde autour de Mercure donne une limite pour avoir  $e = \vec{0}$  comme un point fixe stable à 5 577.68 km ce qui est confirmé (en approximation) par la figure 4.4 où l'on voit l'apparition de la bifurcation vers 5 600 km.

# Excentricité non nulle

## 4.3.1 Cas $e \neq \bar{0}$

On se restreint au cas où  $\bar{\omega} = k\pi$  pour ce mettre au niveau des points fixes stables/isntables. Ce qui implique que  $e \cdot n_{\odot} = 0$  et donc les équations 4.5 deviennent

$$\frac{de}{d\tau} = \frac{3}{4} \left( 2\varepsilon_{\odot} - \varepsilon_p \frac{1}{(1-e^2)^{5/2}} \right) \underbrace{\|j\|}_{=(j \times e)} (n \times e) \quad (4.8)$$

On recherche le(s) point(s) stable(s) et donc on annule cette équation. Ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 2\varepsilon_{\odot}(1-e^2)^{5/2} &= \varepsilon_p \\ \Leftrightarrow 2(1-e^2)^{5/2} \frac{M_{\odot} a^3}{M a_{\odot}^3} \frac{1}{(1-e_{\odot}^2)^{5/2}} &= \frac{J_2 \mathbb{R}_p^2}{a^2} \\ \Leftrightarrow a^5 (1-e^2)^{5/2} &= \frac{J_2 \mathbb{R}_p^2 M a_{\odot}^3}{2 M_{\odot}} (1-e_{\odot}^2)^{5/2} \\ \Leftrightarrow a \sqrt{1-e^2} &= \sqrt[5]{\frac{J_2 \mathbb{R}_p^2 M a_{\odot}^3}{2 M_{\odot}}} \sqrt{1-e_{\odot}^2} \end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned} a &= \sqrt[5]{\frac{J_2 \mathbb{R}_p^2 M a_{\odot}^3}{2 M_{\odot}}} \sqrt{\frac{1-e_{\odot}^2}{1-e^2}} \\ \text{or } e &= \sqrt{1 - 2^{-1/5} \frac{r_L}{a}} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Nous tracons cette courbe sur la figure 4.6 pour l'excentricité de Mercure et pour une excentricité nulle de celle-ci. Les figures 4.4 confirment ces résultats.

# Position point fixe (a,e) $w=k \setminus \pi$

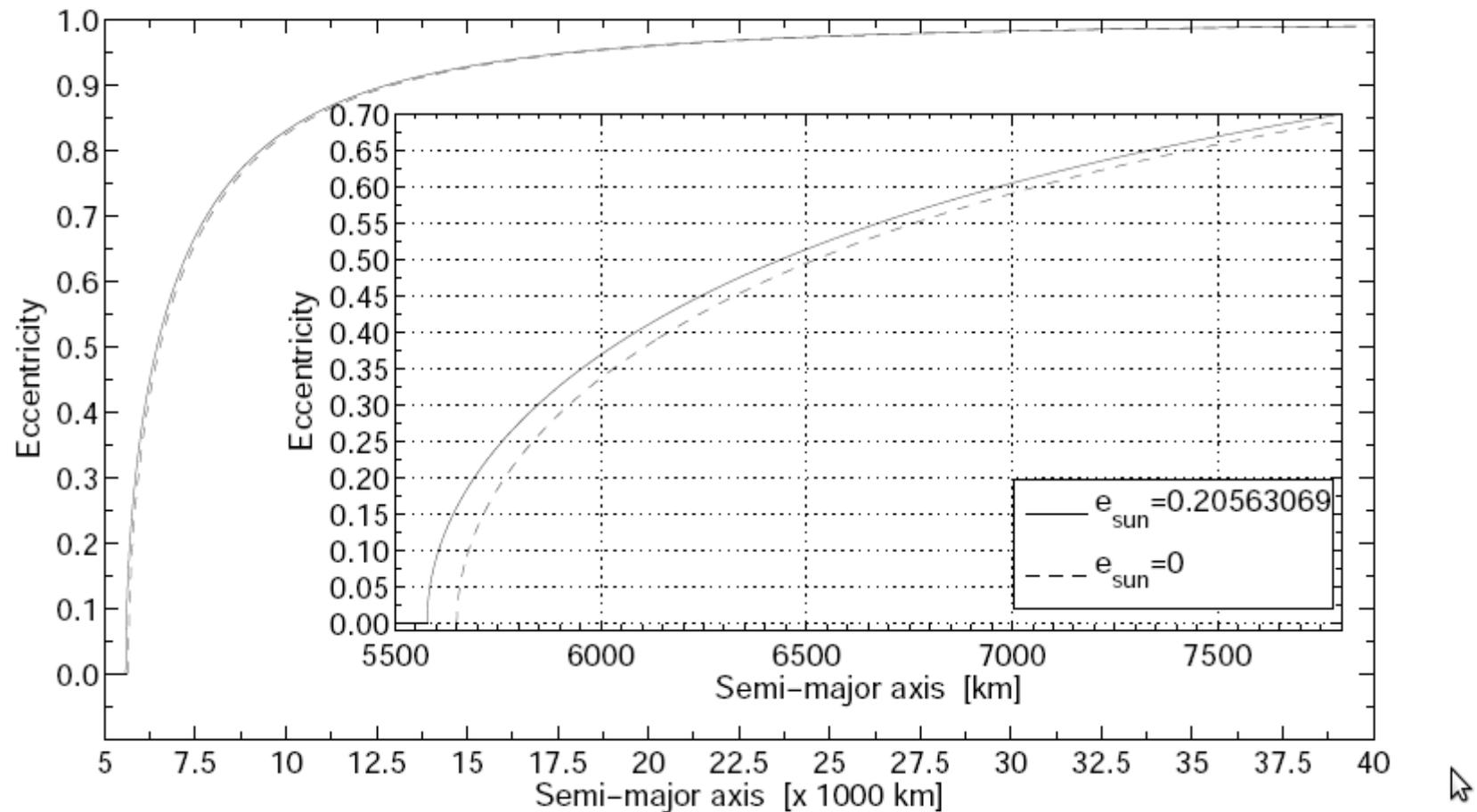


FIG. 4.6 – Position du point fixe  $\frac{d\vec{e}}{dt} = \vec{0}$  en fonction de l'excentricité et du demi-grand axe initiaux.

# Equations analytiques (h,k)

ce qui nous amènes aux équations suivantes

$$\begin{cases} \dot{k} = h \sqrt{1-e^2} \left[ \frac{9}{4}\varepsilon_{\odot} + \frac{3}{4}\frac{\varepsilon_p}{(1-e^2)^{5/2}} \right] \\ \dot{h} = k \sqrt{1-e^2} \left[ \frac{3}{2}\varepsilon_{\odot} - \frac{3}{4}\frac{\varepsilon_p}{(1-e^2)^{5/2}} \right]. \end{cases} \quad (4.12)$$

Si l'on intègre maintenant ces équations nous obtenons la figure 4.7 qui semble confirmer les intégrations purement numériques. Il reste maintenant à chercher la fréquence à l'équilibre. Discuté le cas où l'on fait une erreur sur la valeur du  $J_2$ , ...

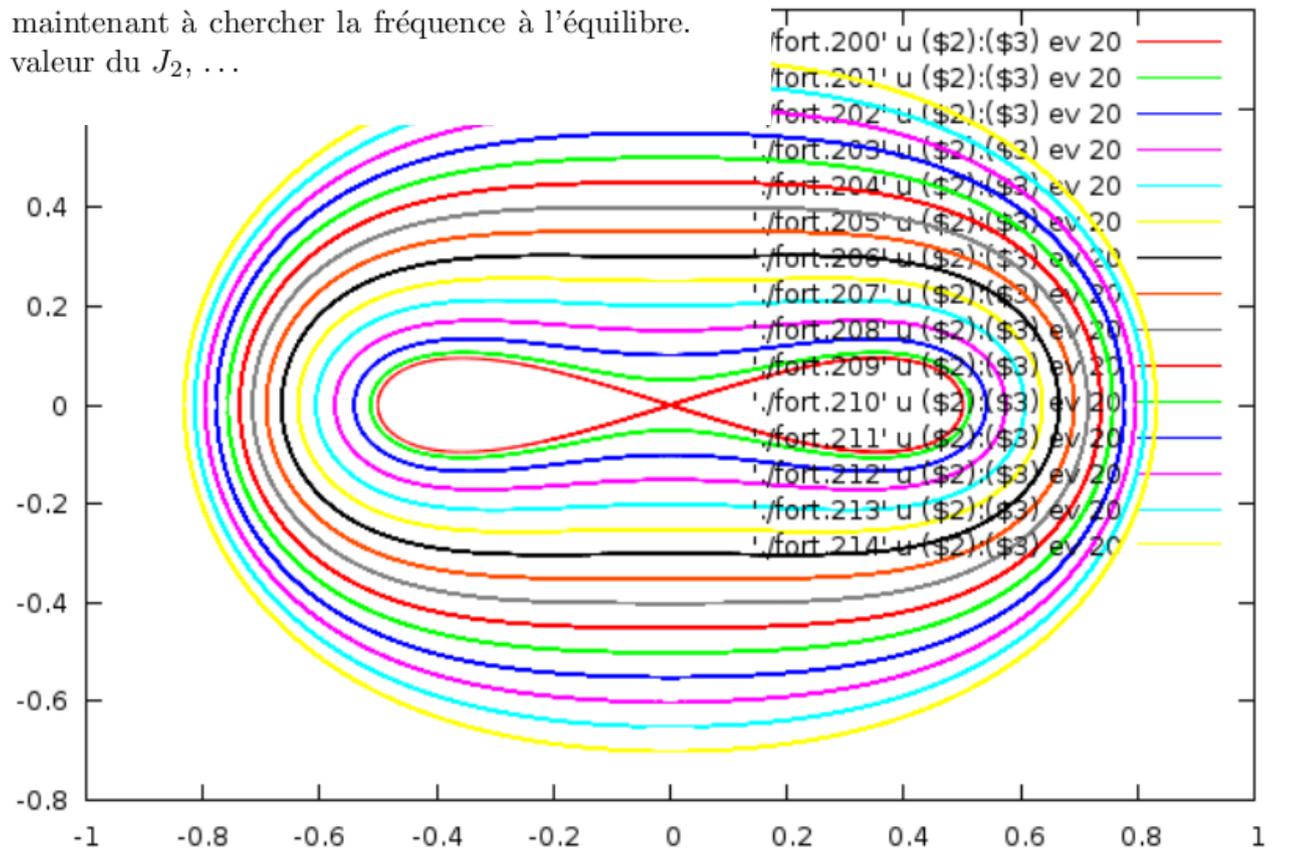


FIG. 4.7 – Intégration numérique des équations 4.12 régissant l'évolution du vecteur  $(k, h)$ .